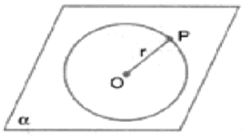
Circunferência e círculo

Circunferência de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância r do ponto O.

$$C(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{O,P} = r\}$$

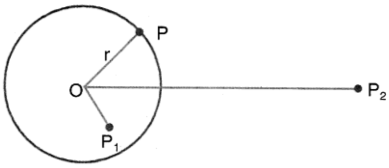


Observação

O conjunto constituído dos pontos de uma circunferência e dos pontos de sua região interior é denominado círculo ou disco.

Posições relativas de ponto e circunferência

Se $d_{o,P} = r$ então P pertence a C.
Se $d_{O,P1} < r$ então P_1 é interior a C.
Se $d_{O,P2} > r$ então P_2 é exterior a C.

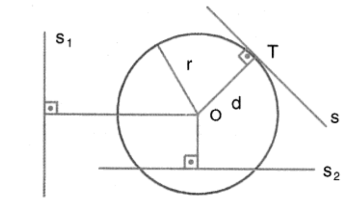


Posições relativas de reta e circunferência

Considere uma circunferência de centro O e raio r. Considere também uma reta s e seja d a distância da reta s ao centro O da circunferência.

Se a distância d entre o centro O e a reta s é igual ao raio r então a reta s é tangente à circunferência.

T = ponto de tangência



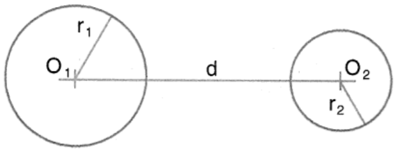
Observações

- A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência T.
- Se a distância d entre o centro O e a reta s, é maior que o raio r, então a reta s_1, é exterior à circunferência.
- Se a distância d entre o centro O e a reta s_2 é menor que o raio r, então a reta S_2 é secante à circunferência.

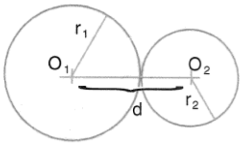
Posições relativas de duas circunferências

Dados C_1 (O_1,r_1) e C_2 (O_2 ,r_2), sendo $r_1 > r_2$ e d a distância entre os centros O_1 e O_2.
Temos:

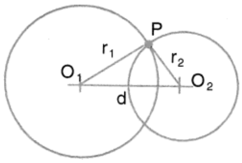
a) Se $\mathbf{d > r_1 + r_2}$, então C_1 e C_2 são circunferências exteriores.



b) Se **$d = r_1 + r_2$**, então C_1 e C_2 são circunferências tangentes exteriormente.

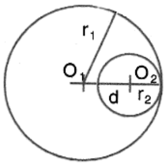


c) Se **$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$**, então C_1 e C_2 são circunferências secantes.

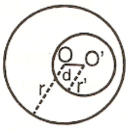


Observe a desigualdade triangular no triângulo PO_1O_2

d) Se **$d = r_1 - r_2$**, então C_1 e C_2 são circunferências tangentes interiormente.



e) Se OS; **$d < r_1 - r_2$**, então C_1 e C_2 são circunferências interiores.

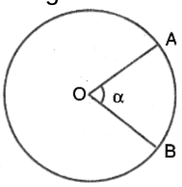


Observação
No caso particular em que d = O, dizemos que as circunferências são concêntricas.

Ângulos na circunferência

Ângulo central

Ângulo central é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. A medida de um ângulo central é igual à medida do arco correspondente

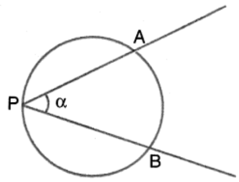


α = AB = AÔB

obs : tome cuidado pois não confunda comprimento de arco, com ângulo do arco, pois comprimento é dado pelo ângulo multiplicado pelo raio da circunferência!!!

Ângulo inscrito

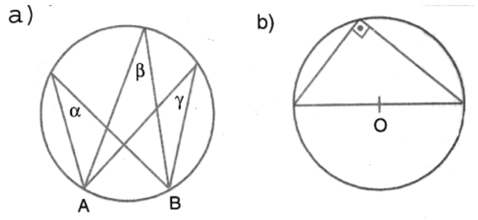
Ângulo inscrito é o ângulo cujo vértice é um ponto da circunferência e os lados são secantes à circunferência. A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.



Observações

a) Os ângulos inscritos num mesmo arco são congruentes.
b) Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência é reto.

Exemplos



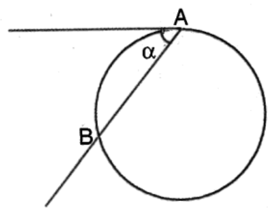
a) α, β e γ são congruentes pois estão inscritos no mesmo arco AB.

b) independentemente do ponto em q se encontre A na circunferencia o ângulo formado por esse vértice sempre será um ângulo reto.(desde que o lado oposto ao ângulo passe pelo centro dessa circunferência!

Ângulo semi-inscrito (ou ângulo de segmento)

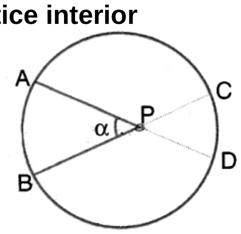
Ângulo semi-inscrito é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência. A medida do ângulo semi-inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

$$\alpha = \overset{\frown}{AB} / 2$$

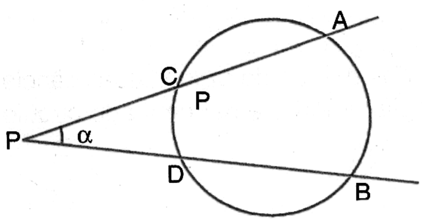


Ângulo de vértice interior

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$



Ângulo de vértice exterior

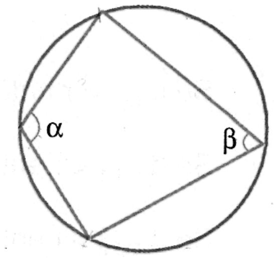


$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Quadrilátero inscrito

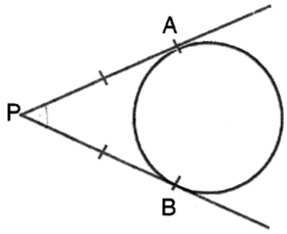
Em todo quadrilátero inscritível, os ângulos opostos são suplementares.

$\alpha + \beta = 180°$



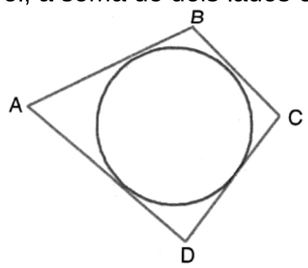
Segmentos tangentes

Se de um ponto P traçarmos duas tangentes a Uma circunferência, sendo A e B os pontos de tangência, então PA = PB.



Quadrilátero circunscrito

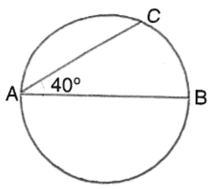
Em todo quadrilátero circunscritível, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.



AB + CD = BC + AD

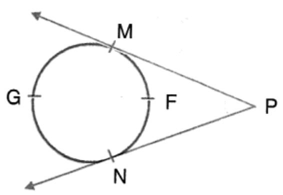
QUESTÕES PROPOSTAS

1) (PUC-SP) Na figura, AB é diâmetro da circunferência. O menor dos arcos (AC) mede:



a) 100° b) 120° c) 140° d) 150° e) 160°

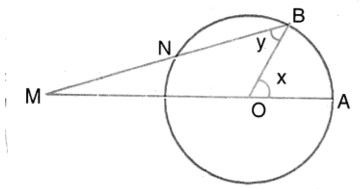
2) (Cesgranrio) As semi-retas PM e PN são tangentes ao círculo da figura e o comprimento do arco (MGN) é 4 vezes o do arco (MFN). O ângulo MPN vale



a) 76° b) 80° c) 90° d) 108° e) 120°

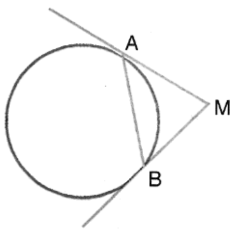
3) Na figura abaixo, O é o centro do círculo, a = 20° e b = 80°. Então, podemos afirmar que:
a) x = 30°
b) x> a
c) x = b - a
d) AD = AP
e) PA = AB

4) Na figura, MN = OB. Se AÔB = x, então ângulo
MBO = Y é: (O é o centro do círculo.)



a} *4x/7* b) *x/2* c) *3x/5* *d)5x/6* e) *2x/3*

5) De um ponto M, exterior a um círculo de centro O, traçam-se as tangentes MA e MB. Se a corda AB é lado de um pentágono regular inscrito nesse círculo, a medida do ângulo AMB é

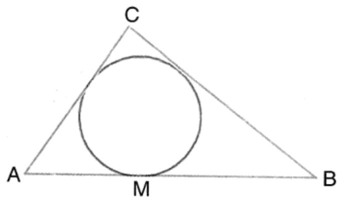


a) 144° b) 108° c) 100° d) 96° e) 72°

6) (Fuvest-SP) Numa circunferência, está inscrito um triângulo ABC; seu lado BC é igual ao raio da circunferência. O ângulo BÂC mede

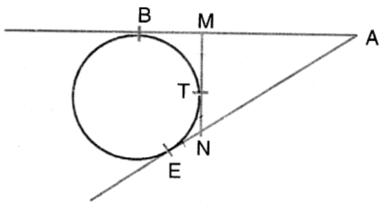
a) 15° b) 30° c) 36° d) 45° e) 60°

7) (UFMG) Na figura, o círculo está inscrito no triângulo ABC cujos lados medem AB = 9 cm, BC = 8 cm, AC = 5 cm e M é o ponto de tangência. A medida de MB é :



a)5 cm b) 5,5 cm c) 6 cm d) 6,5 cm e) 7 cm

8) (FEI-Adaptação) Se AB = 10 cm, então o perímetro do triângulo AMN vale (E, B e T são pontos de tangência)



a) 10cm b) 15 cm c) 20 cm d) 30 cm

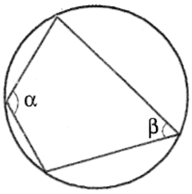
9) ABCD é um quadrilátero circunscrito a um círculo. AB = 7 e CD = 10 são lados opostos. O perímetro de ABCD mede

a) 26   b) 28 c) 32 d)34 e)36

10)(EPUSP) As bases de um trapézio isósceles
circunscrito a uma circunferência medem 9 m e 6 m. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede

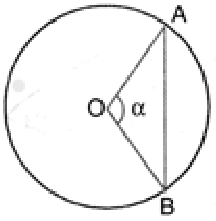
a) 4,5 m b) 6m c) 7,5m d) 8 m e) N.R.A.

11) (Cesgranrio) Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo. A soma, em radianos, dos ângulos α e β mostrados na figura é



a) π/4 b) π /2 c) π d) 3π/2 e) 2π

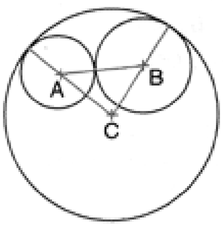
12) (UFGQ) Se a corda AB da figura é um lado de um triângulo eqüilátero inscrito na circunferência de centro em O, a medida do ângulo a, em radianos, é



a) 2π/3 b) 3π/2 c) 3π/4 d) π /3 e) π/6

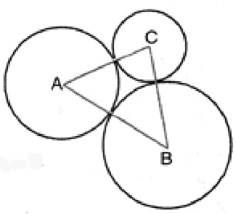
13) Dois círculos de centros A e B são tangentes exteriormente e tangenciam interiormente um círculo de centro C. Se AB=12m, AC=17m e BC=13m, determine a soma das medidas dos raios desses três círculos.

Nota
Quando dois círculos são tangentes, os centros e o ponto de tangência são colineares.



a) 30m b) 31 m c) 32m d)33m

14) Os círculos da figura são tangentes dois a dois e seus centros são vértices do triângulo ABC. Se AB = 14cm, BC = 12cm e AC = 10cm, determine a soma dos raios dos círculos.

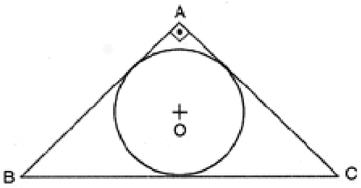


a) 16cm b) 18cm c) 20cm d) 22cm

15) Duas circunferências são secantes, sendo 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo-se que o raio da menor mede 11 cm, determine os possíveis valores do raio da maior, sabendo-se que é um número múltiplo de 9.
a) 18cm e 27cm

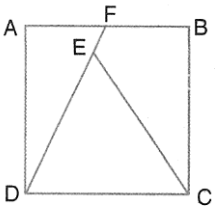
b) 27cm e 36cm
c) apenas 18cm
d) 18cm, 27cm e 36cm

16) (Diamantina-Adaptação) Observe a figura.



Nessa figura, o círculo de centro O está inscrito no triângulo retângulo; AC = 8 cm e BC = 10 cm. Calcule a medida do raio do círculo.
a)1cm
b) 2cm
c)3cm
d) 4cm

17) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e CED um triângulo eqüilátero. Quanto vale o suplemento do ângulo BFE?

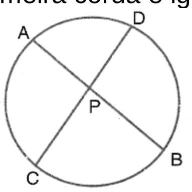


a) 30° b) 120° c) 60° d) 45°

Gabarito
a) 1,12,15,
b) 5,6,14,16
c)7,8,10,11,17
d)2,3,9,13
e) 4

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

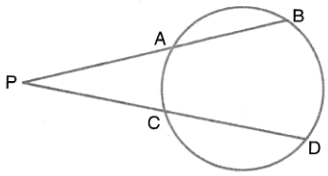
1) Se duas cordas AB e CD de um circunferência se cortam num ponto P, então o produto dos segmentos PA e PB da primeira corda é igual ao produto dos segmentos PC e PD da segunda corda.



AB e CD → cordas

PA . PB = PC . PD

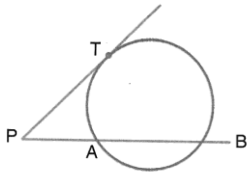
2) Se os prolongamentos de duas cordas AB e CD se cortam em um ponto P exterior a uma circunferência, o produto dos segmentos PA e PB é igual ao produto dos segmentos PC e PD.



AB e CD → cordas
PB e PD → secantes

PA . PB = PC . PD

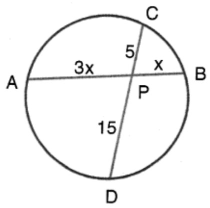
3) Se uma secante AB e uma tangente a uma circunferência num ponto T se cortam externamente num ponto P, a medida do segmento PT é igual à média geométrica dos segmentos PA e PB.



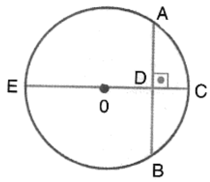
PT^2 = PA . PB

Exemplos:

1) Calcule o valor de x na figura abaixo:

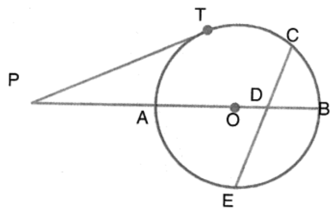


2) Na figura, AB é perpendicular ao diâmetro EC do círculo de centro O, CD = 4 cm e ED = 9 cm. A medida da corda AB, em cm, é



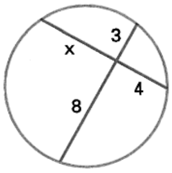
a) 8
b) 10
c) 12
$d)2\sqrt{13}$
$e)2\sqrt{17}$

3) Na figura abaixo, onde T é o ponto de tangência e O é o centro da circunferência , determine o valor de DE.
Dados: PT = 16, PA = CD = 8, BD = 4

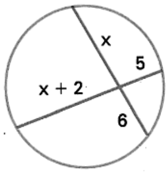


Exercícios

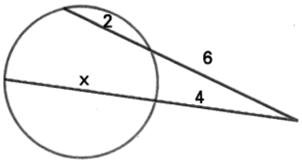
1) Determine a medida x indicada na circunferência a figura abaixo.



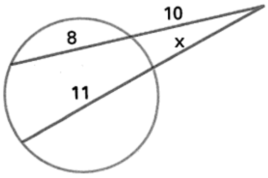
2) Na circunferência da figura abaixo, determine a medida x indicada.



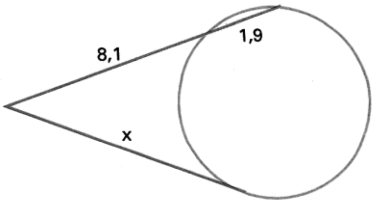
3) Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



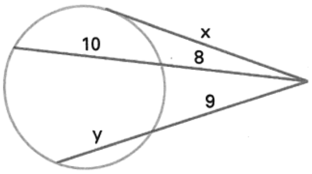
4) Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



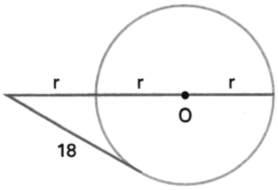
5) Determine a medida x, do segmento de reta tangente, indicada na circunferência da figura abaixo.



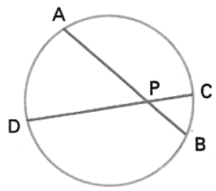
6) Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.



7) Determine a medida r do raio da circunferência da figura abaixo.



8) Na figura abaixo, PA = 3x, PB = x + 1, PC = x e PD = 4x - 1. Nessas condições, não importando a unidade, determine:



a) a medida x
b) o comprimento de cada urna das cordas

9) O raio de uma circunferência é 6 cm. De um ponto P externo, traçamos uma tangente e uma secante a essa circunferência. A secante, que encontra a circunferência nos pontos A e E, passa pelo centro e é tal que o seu segmento externo mede 8 cm. Determine a medida do segmento da tangente que foi traçada do ponto P.

10) Uma corda AB, que mede 18 cm, corta urna corda CD de tal forma que os segmentos determinados sobre CD medem x e 2x cm, respectivamente. Sabendo que a corda CD mede 12 cm, calcule as medidas dos segmentos determinados sobre a corda AB.

11) Por um ponto *P,* distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda AB, que mede 8 cm. Se o comprimento do raio da circunferência é 12 cm, determine:

a) O comprimento do segmento de secante traçada do ponto *P*
b) O comprimento do segmento externo dessa secante

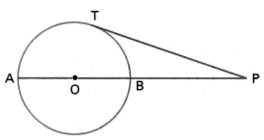
12) De um ponto *P,* situado a 3 cm de uma circunferência, traça-se um segmento de tangente PC cuja medida é 9 cm. Nessas condições, determine o comprimento do raio dessa circunferência.

13) De um ponto *P,* externo a uma circunferência, traçamos urn segmento de tangente PA e um segmento de secante. O segmento externo da secante mede 4 cm e o segmento interno tem a mesma medida que o segmento PA. Nessas condições, fazendo $\sqrt{5}$ = 2,23, determine:

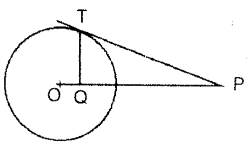
a) a medida do segmento PA
b) o comprimento do segmento de secante

14) Numa circunferência de centro O e raio 6 cm, traça-se uma corda AB. Sobre essa corda, toma-se um ponto M de tal forma que AM = 5 cm e OM = 4 cm. Determine a medida do segmento MB.

15) Na figura abaixo, temos que PO = 20 cm e o comprimento do raio da circunferência é 16 cm. Nessas condições, determine a medida do segmento PT.



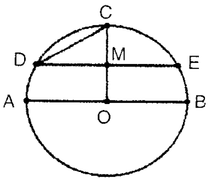
16) Observe a figura.



Nessa figura, o círculo tem centro O e raio OP = 16. A reta PT é tangente ao círculo em T e o segmento TQ é perpendicular à reta OP.
Assim sendo, o comprimento do segmento QP é :

a) 13,75 b) 13,85 c) 14,25 d) 14,5

17)(UFMG-1994) Observe a figura,



Nessa figura, o segmento AB é diâmetro da circunferência de centro O e raio 12, o segmento OC é perpendicular ao segmento AB, e o segmento DE é paralelo ao segmento AB e M é ponto médio do segmento OC.
A medida DC é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

GABARITO

1) 6 **2)** 10 **3)** 8 **4)** 9 **5)** 9 **6)**X = 12 E Y = 7

7) $9\sqrt{2}$ **8)** a) 4 b) AB = 17 CD = 19 **9)** $2\sqrt{6}$ **10)** 16 cm e 2 cm

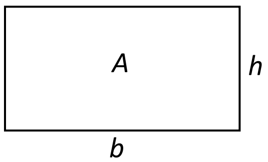
11)a) 18 cm b) 10 cm **12)** 12 cm **13)** a) 6,46 cm b) 10,46 cm

14) 4 cm **15)** 12 cm **16)** a **17)** e

ÁREA DAS FIGURAS PLANAS

A) RETÂNGULO

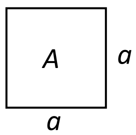
A área A de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = b \cdot h$$

B) QUADRADO

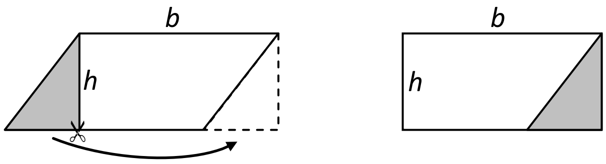
O quadrado é um retângulo; logo, sua área A é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = a^2$$

C) PARALELOGRAMO

A área do paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h. Observe a figura:

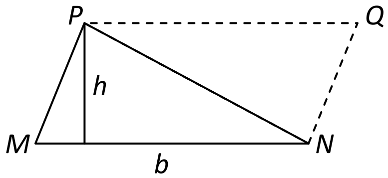


$$A = b \cdot h$$

O triângulo sombreado no paralelogramo é congruente ao triângulo pontilhado; assim, se o colocarmos no lugar pontilhado, obteremos um retângulo de base b e altura h. Logo a área A do paralelogramo é o produto da medida da base pela medida da altura.

D) TRIÂNGULO

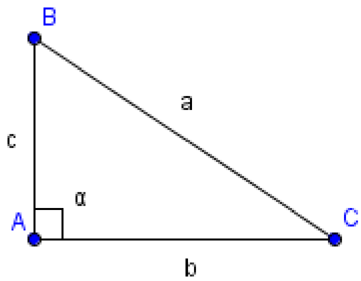
Consideremos o triângulo MNP cuja base $\overline{MN}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P uma reta paralela à base e por N uma reta paralela ao lado $\overline{MP}$, obtemos o paralelogramo MNQP. A área do triângulo MNP é a metade da área do paralelogramo, ou seja, a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

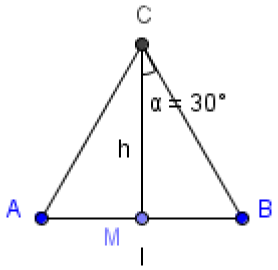
Ø CASOS PARTICULARES:

TRIÂNGULO RETÂNGULO: a área do triângulo retângulo vale metade do produto dos catetos.



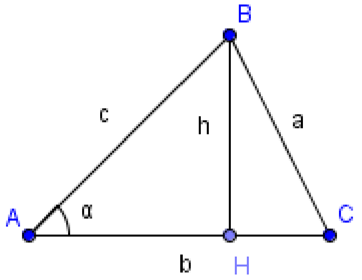
$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

TRIÂNGULO EQÜILÁTERO:



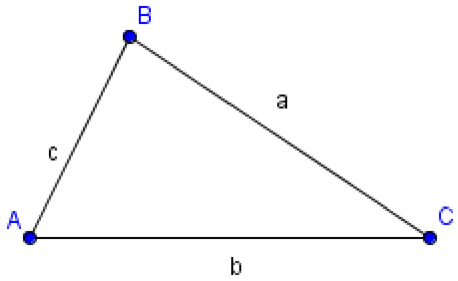
$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES (FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA DA ÁREA):



$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen\alpha}{2}$$

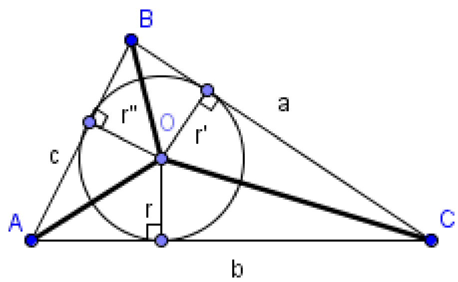
ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS TRÊS LADOS (FÓRMULA DE HERON)



$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

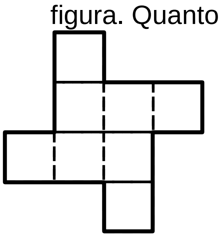
AREA DO TRIÃNGULO EM FUNÇÂO DO RAIO DA CIRCUNFERENCIA INSCRITA (BISSETRIZ E INCENTRO)



$$A = \frac{r}{2}(a+b+c)$$

EXEMPLOS:

1) (UFRN) Um terreno de 72 m^2 de área é formado por 8 quadrados congruentes, conforme mostra a figura. Quanto mede a cerca que delimita o terreno?



---

2) (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro

   a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?
   b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

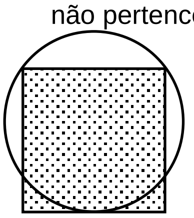
---

3) Determine a área de um quadrado inscrito:
   a) em uma circunferência de raio 2 cm;
   b) em uma semi-circunferência de raio 2 cm.

4) Se aumentarmos em 20% o lado de um quadrado, sua área aumentará 20 cm^2. Determine o lado do quadrado original.

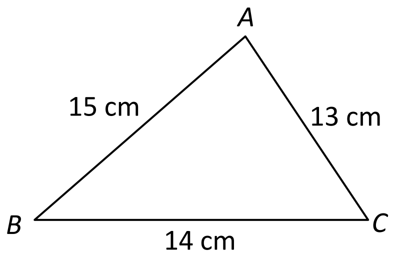
5) Uma parede retangular de 4,5 m de comprimento por 3 m de altura deve ser completamente revestida com azulejos quadrados de lado 15 cm. Quantos azulejos serão necessários?

6) (UFPR) Uma circunferência de raio 5 cm tangencia um lado de um quadrado e passa pelos vértices que não pertencem a esse lado, conforme a figura. Calcule a área desse quadrado.



7) Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 11 cm e a hipotenusa tem medida excedendo 4 cm a medida do outro cateto. Determine a área do triângulo.

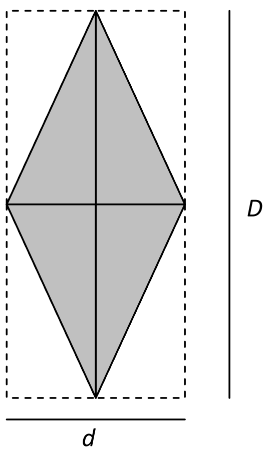
8) Considere o triângulo *ABC*:



a) Determine a medida *h* da altura $\overline{AH}$.
b) Calcule a área desse triângulo.
c) O sábio grego Heron, que viveu em Alexandria no século I d.C., provou que a área *A* de um triângulo cujos lados medem *a*, *b* e *c* é dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que *p* é o semi-perímetro, isto é, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Usando a fórmula de Heron, calcule a área do triângulo *ABC*.

E) LOSANGO

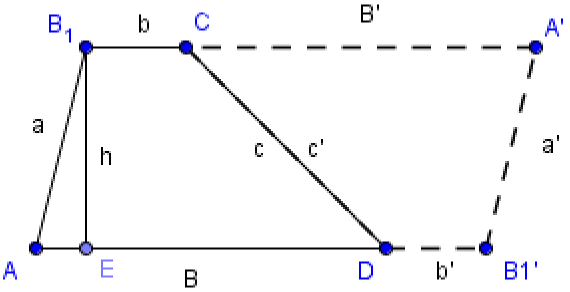
Construindo um retângulo de dimensões D e d, obtemos oito triângulos retângulos congruentes. A área ocupada pelo losango vale a metade da área ocupada pelo retângulo. Portanto, a área do losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

F) TRAPÉZIO

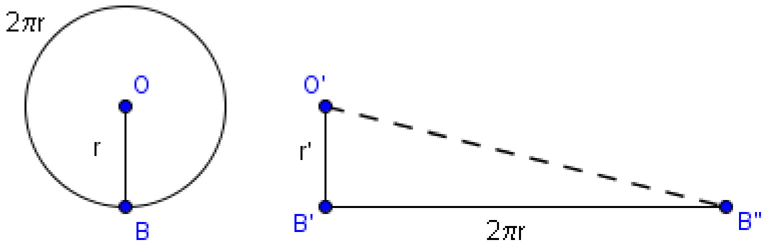
Traçando a diagonal QN, dividimos o trapézio em dois triângulos de altura *h* em relação às bases *b* e *B*. A área do trapézio será igual à soma das áreas dos triângulos *MNQ* e *NPQ*.



$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

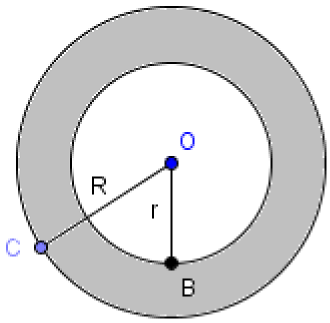
G) CÍRCULO

O perímetro do círculo é $2\pi r$. basta multiplicar o raio do círculo pelo ângulo dado por uma volta completa em radianos no caso 2π.



$$A = \pi r^2$$

Coroa circular:

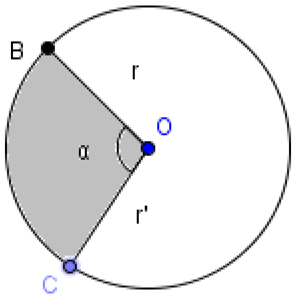


$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

Setor circular:

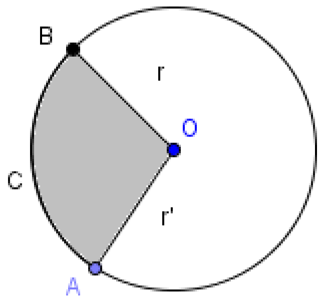
Em cada círculo, a região limitada pelos lados de um ângulo central é chamada de setor circular.

Área do setor circular em função do raio r e do ângulo α.



α em graus:	α em radianos:
$360^o \rightarrow \pi r^2$ $\alpha^o \rightarrow A$ Resolvendo a regra de três temos: $A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^o}$	$2\pi \rightarrow \pi r^2$ $\alpha \rightarrow A$ resolvendo a regra de três temos: $A = \dfrac{r^2 \alpha}{2}$

Área do setor circular em função do raio r e do comprimento do arco c.



resolvendo uma simples regra de três, com o comprimento total da circunferência $2\pi r$ estando para o comprimento C do arco e a área total da circunferência πr^2 estando para a área do setor circular em cinza, temos:

$2\pi r \rightarrow C$
$\pi r^2 \rightarrow A$. logo : **$A = Cr / 2$**

Exercícios

1) Que comprimento deve ter o lado de um quadrado para que a sua área seja igual à de um retângulo cujas dimensões são, respectivamente 24m e 12m?

2) Calcular a área do triângulo cujos lados medem, respectivamente 10m, 17m e 9m.

3) Calcular a área de um quadrado cuja diagonal mede 8m.

4) Calcular a área do losango, cujo lado tem 5 m e a distância entre dois lados paralelos é de 4,8 m.

5) Um retângulo está inscrito num círculo de raio 5 m. O perímetro do retângulo é de 28m. Determinar a área desse retângulo.

6) Dois lados contíguos de um paralelogramo medem, respectivamente, 3m e 6m, e formam um ângulo de 45^{o} . Determinar a área desse paralelogramo.

7) A área de um triângulo retângulo é de $24m^2$ e a hipotenusa tem 10m. Determinar os catetos desse triângulo.

8) Calcular a área do hexágono regular, cujo apótema tem $\sqrt{3}$ m.

9) Calcular a área do triângulo eqüilátero circunscrito a uma circunferência de raio 1m.

10) Determinar o comprimento de uma circunferência, sabendo-se que a área do hexágono regular inscrito vale $10{,}392m^2$.

11) Calcular a área do triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 5m.

12) Calcular a área do triângulo eqüilátero inscrito num círculo cuja área é de $50{,}24m^2$.

13) A área de um hexágono regular tem $10{,}392m^2$. Calcular o raio do círculo circunscrito.

14) Calcular as bases de um trapézio cuja altura tem 12m, sabendo que o produto das bases, que é igual à área, vale $150m^2$.

15) Calcular a área de um trapézio isósceles cujas bases têm, respectivamente, 14dm e 6dm e o lado 5dm.

16) As bases de um trapézio têm 10m e 20m. Determinar o comprimento de uma paralela que divida o trapézio em duas partes equivalentes.

17) Calcular as dimensões e a área de um retângulo, sendo seus lados respectivamente iguais às diagonais de um losango cuja área mede $24m^2$ e o lado 5m.

18) Os lados de um triângulo são números inteiros e consecutivos e sua área mede $84m^2$. Determinar os lados desse triângulo.

GABARITO

01) 16,9m **02)** $36m^2$ **03)** $32m^2$ **04)** $24m^2$ **05)** $48m^2$ **06)** $12{,}72m^2$

07) 6m e 8m **08)** m^2 **09)** $5{,}196m^2$ **10)** $12{,}5664m^2$ **11)** $32{,}475m^2$ **12)** $20{,}78m^2$

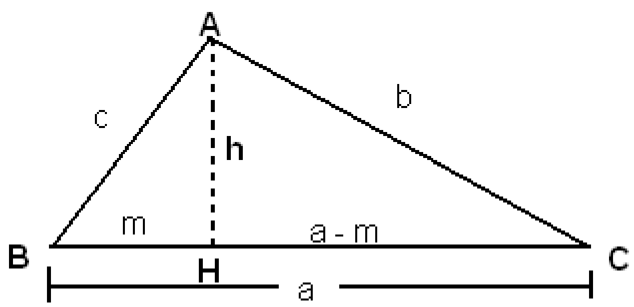
13) 2m **14)** 10m e 15m **15)** $30dm^2$ **16)** 15,81m **17)** 8m, 6m, $48m^2$

18) 13, 14 e 15 metros.

Extras:

Demonstração da formula de heron:

Considere um triangulo ABC:



aplicando o teorema de pitágoras aos triângulos AHB e AHC, respectivamente , obtemos:

$c^2 = h^2 + m^2$ e $b^2 = h^2 + (a – m)^2$ donde $m = a^2 + c^2 - b^2 / 2^{a}$

Em $h^2 = c^2 - m^2$, substituindo o valor de m obtido anteriormente, vem:

$h^2 = c^2 - (a^2 + c^2 - b^2 / 2a)$

fatorando esta ultima expressão , podemos escrever:

$h^2 = (a + c + b)(a + c – b)(b + a – c)(b – a + c) / 4a^2$

denotando por $2p = a + b + c$ o perimetro do triangulo ABC, o semiperimetro do referido triangulo é dado por

$p = (a + b + c) / 2$

e daí ,

$a + c – b = a + b + c – 2b = 2p – 2b = 2(p – b)$

analogamente,

$b + a – c = 2(p – c)$

$b – a + c = 2(p – a)$

substituindo esses valores na ultima expressão de h^2, vem:

$h^2 = 2p\ 2(p – b)\ 2(p – c)\ 2(p – a) / 4a^2$

donde:

$$h = a/2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

designando por S a área do triangulo ABC teremos:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

finalmente temos: $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

fonte: guia do tutor 2, projeto entre jovens, caed.