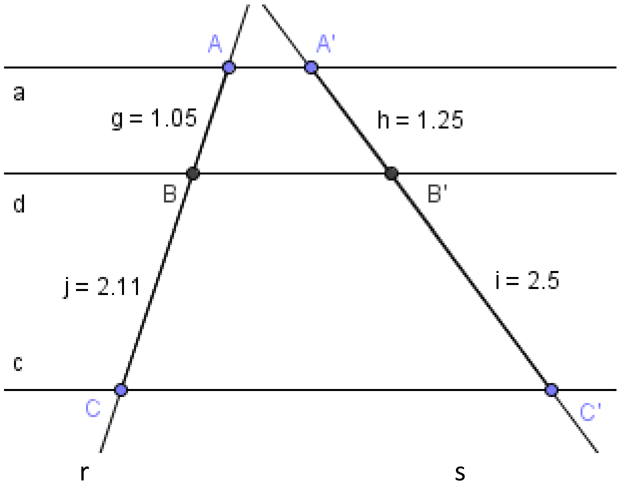
FEIXE DE RETAS PARALELAS

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas distintas de um plano, paralelas entre si. As retas a, d e c da figura constituem um feixe de retas paralelas.



Transversal ao feixe de retas paralelas é um reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe. Na figura, as retas r e s são transversais aos feixes.

A e A' são pontos correspondentes. Também são correspondentes aos pontos B e B', C e C', $\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ são segmentos correspondentes. Igualmente $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ assim como também $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$.

TEOREMA DE TALES

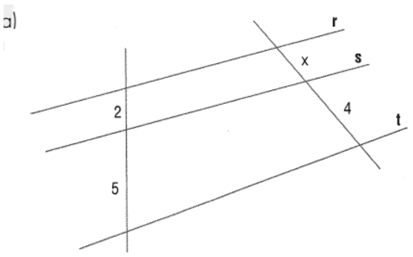
Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer segmento proporcional.

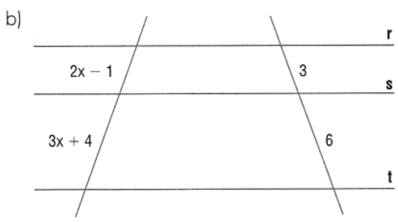
Em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:

$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$ ou $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$ ou $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

Exemplos :

1) Nas figuras as retas r, s e t são paralelas. Vamos determinar o valor de x :





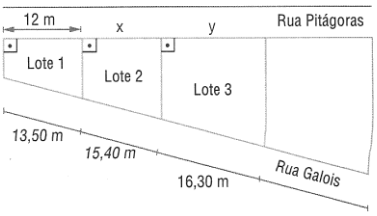
Solução:

a) pelo teorema de tales temos que:7 / 2 = (x+4) / x ,
2x + 8 = 7x,
5x = 8 ,

x = 8 / 5

b) de mesma forma: (2x – 1) + (3x + 4) / 2x – 1 = 9 / 3,
(5x + 3) / 2x – 1 = 3,
5x + 3 = 6x – 3,
x = 6

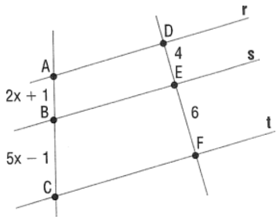
2) Observe a planta de um loteamento:



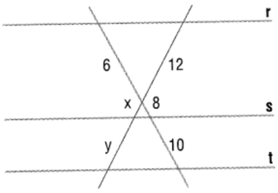
Tente responder a esta pergunta: Quais são as medidas aproximadas das frentes dos lotes 2 e 3?

Exercícios:

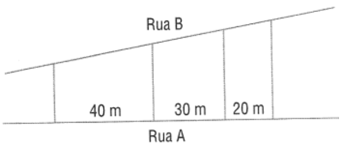
1) Na figura , r // s // t . Determine a medida do segmento $\overline{AB}$.



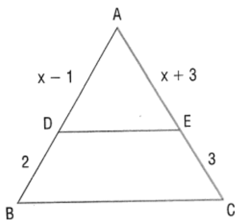
2) Na figura, r // s // t. qual é o valor de xy?



3) Três terrenos têm frentes para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?



4) Na figura,a reta DE é paralela ao lado BC do triângulo ABC. Calcule o valor de x.

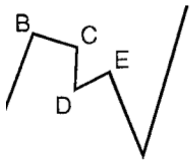


GABARITO:

1) 3,5 **2)** 320 **3)** 80m, 60m e 40m **4)** 9

POLÍGONOS

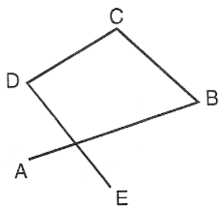
O conjunto constituído de n segmentos consecutivos e não adjacentes de um plano: A_0A_1 , A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ é chamado **linha poligonal.**



(a) Linha poligonal simples

A figura mostra uma linha poligonal ABCDEFG. Os pontos A, B, C, D, E, F e G são os **vértices,** os segmentos AB,. BC. CD, DE, EF e FG são os **lados** e os pontos A e G são as **extremidades** da linha.

Uma linha poligonal na qual dois dos lados não consecutivos nunca se cortam fora dos vértices é uma linha poligonal **simples.**

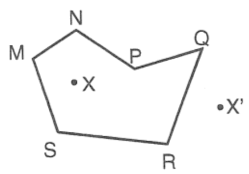


(b) Linha poligonal não-simples

A linha poligonal da figura (a) é simples. A linha poligonal ABCDE da figura (b) não é simples, porque os lados não-consecutivos AB e DE se interceptam em um ponto distinto dos vértices.

Se as extremidades de uma linha poligonal coincidem, ela é chamada linha poligonal **fechada.**

Na figura (c), vemos uma linha poligonal simples e fechada MNPQRSM.

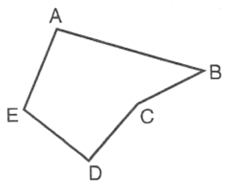


(c) Linha poligonal simples fechada

Toda linha poligonal simples e fechada divide seu plano em duas regiões, uma **interior** e outra **exterior**.

Na figura (c), o ponto X pertence à região interior e o ponto X' pertence à região exterior da linha poligonal.

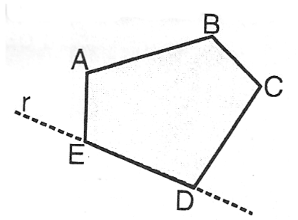
Chamamos **polígono** o conjunto constituído dos pontos de uma linha poligonal fechada simples e dos pontos da região interior a essa linha poligonal.



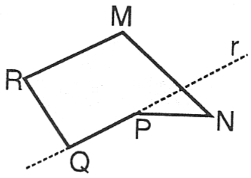
(d) Polígono ABCDE

A figura (d) mostra um polígono ABCDE de 5 lados (AB, BC, CD, DE, EA) e 5 vértices (A, B, C, D, E).

Um polígono é dito **convexo** se ele está todo contido num mesmo semiplano em relação à reta suporte de qualquer de seus lados. Em caso contrário, ele é um polígono **côncavo**.



(e) Polígono convexo



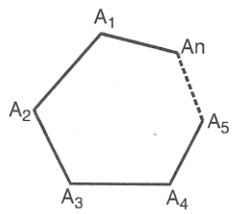
(f) Polígono côncavo

O polígono da figura (e) é convexo. O da figura (f) é côncavo; observe que partes do polígono MNPQR estão contidas em ambos os semiplanos determinados pela reta r, suporte do lado PQ.

POLÍGONOS CONVEXOS

Já vimos a definição de polígono convexo.

A figura mostra um polígono convexo que possui, **n vértices e n lados**.

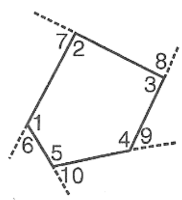


Em função de seu número de lados, um polígono convexo pode receber nomes especiais:

a) 3 lados: triângulo
b) 4 lados: quadrilátero
c) 5 lados: pentágono
d) 6 lados: hexágono
e) 7 lados: heptágono
f) 8 lados: octógono
g) 9 lados: eneágono
h) 10 lados: decágono
i) 11 lados: undecágono
j) 12 lados: dodecágono
l) 15 lados: pentadecágono
m) 20 lados: icoságono

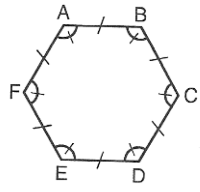
A partir de agora, quando nos referirmos a um polígono convexo, vamos chamá-lo simplesmente “polígono”.

Assim, no pentágono da figura, os ângulos 1, 2, 3, 4 e 5 são os ângulos internos e os ângulos 6, 7, 8, 9 e 10. são os, ângulos externos respectivos.



Convém lembrar que um ângulo interno e seu ângulo externo respectivo são adjacentes e, portanto, suplementares.

Um polígono que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes é chamado **polígono regular.**



É claro que o triângulo regular é o triângulo eqüilátero e o quadrilátero regular é o quadrado.
A soma dos lados de um polígono é chamada perímetro do polígono.

Soma dos ângulos internos e externos de um polígono

A **soma dos ângulos internos de um polígono** é função apenas do seu número de lados. Sendo n o número de lados de um polígono, a soma Si de seus ângulos internos é dada por

$$\boxed{S_i = (n-2) \cdot 180°}$$

Cada ângulo externo do polígono é o suplemento do respectivo ângulo interno. Assim, chamando de Se a soma dos ângulos externos de um polígono.

$$\boxed{S_e = 360°}$$

Observe, portanto, que a soma dos ângulos externos de um polígono (um em cada vértice) é constante e igual a 360°, ou seja, independe do número de lados do polígono.

Chamando-se de a_i cada ângulo interno e de a_e cada ângulo externo de um polígono regular.

$$\boxed{a_i = \frac{180°(n-2)}{n}} \qquad \boxed{a_e = \frac{360°}{n}}$$

Exemplos

1) Qual é a soma dos ângulos internos de um pentágono (n = 5) ?

Solução: apenas usando a formula $\boxed{S_i = (n-2) \cdot 180°}$ e já sabendo o numero de lados do poligono em questao, basta substituir.
S = (5 – 2) 180°
S = (3)180°
S = 540°

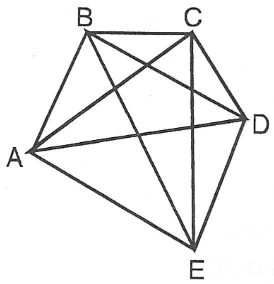
2) Descobrir a categoria dos polígonos cuja soma dos ângulos internos é 1440°.

3) Cada um dos ângulos externos de um octógono regular (n = 8) é dado por ?

Diagonais de um polígono

Cada um dos segmentos que tem como extremos dois vértices não-consecutivos de um polígono é chamado **diagonal do polígono.**

Na figura, os segmentos AC, AD, BD, BE e CE são as diagonais do pentágono ABCDE.



É claro que o número de diagonais de um polígono é função do seu número de lados.

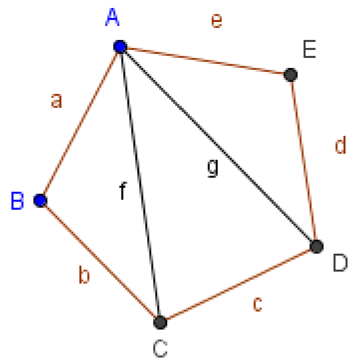
O triângulo não tem diagonais, já que seus três vértices são dois a dois adjacentes.

Exemplos :

1) Qual o número de diagonais de um pentágono (n=5)?

Solução:

O polígono em questão é um pentágono. Logo vamos demonstrar a formula:



Repare que o vértice A não pode formar três diagonais. um com o vértice B, um com vértice E, e um com ele mesmo, assim não podemos utilizar 3 vértices do polígono, como as diagonais são dadas em função do numero de vértices que no caso é o mesmo que o numero de lados, temos no final a formula: D = (N – 3)N , N – 3 é multiplicado por N pelo fato de que todos os vértices devem ser utilizados. Para finalizar a formula devemos dividi-la por 2 pelo fato de que todos os vértices serão contados duas vezes, como o segmento (exemplo AD = DA) logo a formula é:

$$\boxed{D = \frac{(N-3)N}{2}}$$

onde N é o numero de lados ou vértices.
Finalmente resolvendo o exercício temos q N = 5 logo:
D = 5

2) Descobrir a categoria dos polígonos que têm 9 diagonais.

3) Num polígono, o número de diagonais é o triplo do número de lados.Calcular a soma de seus ângulos internos.

4) Qual é o polígono convexo em que a soma das medidas dos ângulos internos é igual à dos externos:

a) triângulo
b) quadrilátero
c) pentágono

d) hexágono

5) Os números de lados de três polígonos convexos são consecutivos. A soma dos ângulos internos desses três polígonos é 2700°. Determine quantos lados tem cada polígono.

a) 6 , 7 e 8
b) 7, 8 e 9
c) 5, 6 e 7
d) 8 , 9 e 10

6) (UFES) Um polígono regular tem por soma dos ângulos internos 2 340º. Quantas diagonais tem esse polígono?

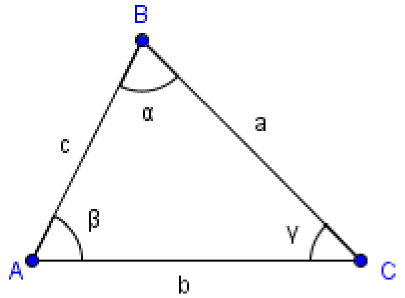
a) 15
b) 90
c) 45
d) 30
e) 20

7) (UFPA) Se a medida de ângulo interno de um polígono regular é 150º, a soma dos ângulos internos desse polígono é:

a) 1 240º
b) 3 240º
c) 3 600º
d) 2 240º
e) 1 800º

TRIÂNGULO

Chama-se **triângulo** todo polígono de três lados. Na figura, temos um triângulo ABC de lados AB, BC e AC e vértices A, B e C e ângulos internos α, β e χ.



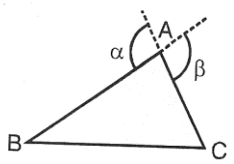
A soma dos lados é o **perímetro** do triângulo e costuma ser representado por 2p.
Portanto:

2p = AB + AC + BC ou 2p = a + b + c

Ângulos internos ou simplesmente ângulos do triângulo são os ângulos convexos.

α , β e χ .

Cada ângulo adjacente a um ângulo interno é um **ângulo externo** do triângulo. Em cada vértice há dois ângulos externos opostos pelo vértice e, portanto, congruentes.

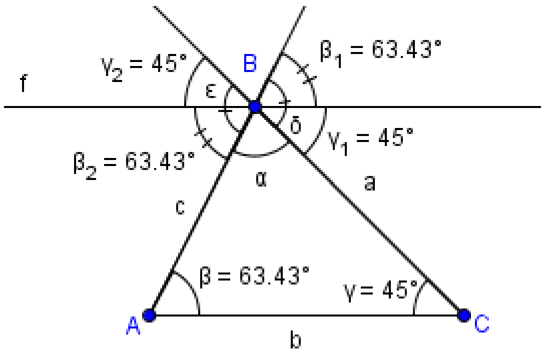


Na figura, destacamos α e β ângulos externos relativos ao ângulo interno A.
É claro que α + A = $\beta + A = 180°$, isto é, cada ângulo externo de um triangulo é suplemento do ângulo interno a ele adjacente.

ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

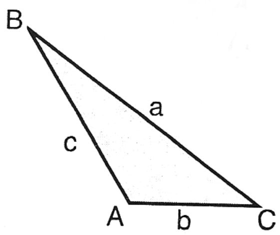
A soma dos ângulos internos de um triângulo é constante é igual a 180°.

Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não-adjacentes.



.Num triângulo ABC,costumamos dizer que os lados AB, AC e BC são opostos, respectivamente, aos vértices ou aos ângulos C, B e A e vice-versa (figura).

É comum representarmos a medida de cada lado pela letra minúscula que corresponde ao seu vértice oposto.



Exemplo:

1) Em um triângulo ABC, sabe-se que A = 3B e que o Ângulo B ultrapassa em 3° o complemento de C. Determinar os três ângulos desse triângulo.

Resolução:

Como A = 3B e o ângulo B = 3 + complemento de C que chamaremos de P
Então B = P + 3° e ainda A + B + C = 180° e C + P = 90° ,fazendo a substituição temos que:
3B + B + 90° - P = 180°,
3B + B + 90 - B - 3° = 180°
3B = 93°
B = 31°

CLASSIFICANDO OS TRIÂNGULOS

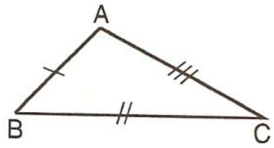
Em função da comparação entre seus lados, um triângulo pode ser chamado de:

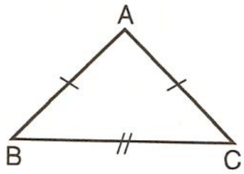
a) **escaleno** se, e somente se, não tem lados congruentes;

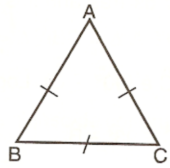
b) **isósceles** se, e somente se, tem dois lados congruentes ;

c) **eqüilátero** se, e somente se, tem os três lados congruentes .

No caso do triângulo isósceles, sendo AB = AC, o terceiro lado BC é chamado **base** e os ângulos B e C são os **ângulos da base.** O ângulo A, oposto à base, é chamado **ângulo no vértice.**







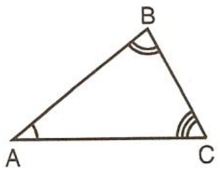
triângulo escaleno triângulo isósceles triângulo eqüilátero

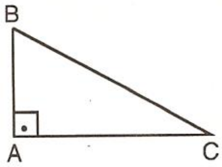
Observe que todo triângulo eqüilátero é isósceles, podendo qualquer de seus lados ser considerado como base.

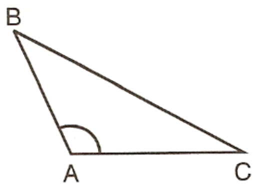
Sendo a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180°, é claro que um triângulo pode ter no máximo um ângulo reto ou um ângulo obtuso.

Em função da natureza de seus ângulos, um triângulo pode ser classificado como :

- **acutângulo,** se, e somente se, tem três ângulos agudos;
- **retângulo,** se, e somente se, tem um ângulo reto (e conseqüentemente dois ângulos agudos);
- **obtusângulo,** se, e somente se, tem um ângulo obtuso (e conseqüentemente dois ângulos agudos),







triângulo acutângulo triângulo retângulo triângulo obtusângulo

No triângulo retângulo, sendo A = 90°, é claro que B + C = 90°, ou seja, os ângulos agudos são complementares.

O lado BC do triângulo retângulo, oposto ao ângulo reto, é chamado **hipotenusa;** os outros dois lados são chamados **catetos.**

Para os triângulos retângulos, vale o seguinte caso especial de congruência: se dois triângulos retângulos têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes, então eles são congruentes.

A respeito dos triângulos isósceles, podemos destacar alguns fatos importantes:

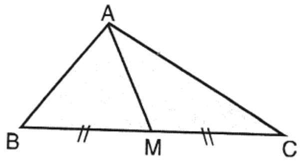
Num triângulo isósceles:
- **os ângulos da base são congruentes;**
- **a mediana relativa à base é também altura e bissetriz interna.**

SEGMENTOS E PONTOS NOTÁVEIS EM UM TRIÂNGULO.

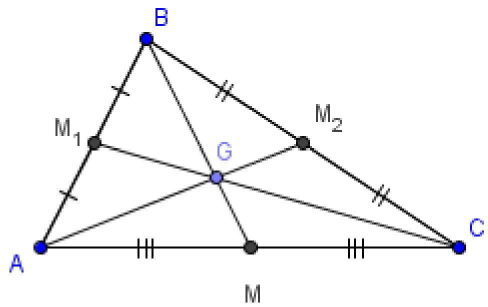
Além dos lados, existem no triângulo outros segmentos de grande importância:
As medianas, as bissetrizes tanto internas quanto externas e as alturas,também temos as mediatrizes que não são segmentos, mais o encontro das três são um ponto notável no triângulo. Estudaremos a seguir esses segmentos e o encontro de cada um originando seus respectivos pontos notáveis.

A mediana:

Chama-se **mediana** de um triângulo qualquer segmento que tem como extremos um vértice e o ponto médio do lado oposto do triângulo. Na figura, o segmento AM é a mediana relativa ao vértice A (ou ao lado BC).



Todo triângulo tem três medianas, cada uma relativa a um vértice (ou a um lado) e o encontro das três medianas recebe o nome de **baricentro** que também é o centro de equilíbrio do triângulo.



O ponto G é o baricentro

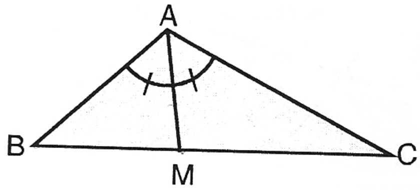
Ainda em relação ao baricentro podemos afirmar pelo seguinte teorema que:
O baricentro de um triângulo dista de cada vértice 2/3 da mediana correspondente.

BG = 2/3 BM

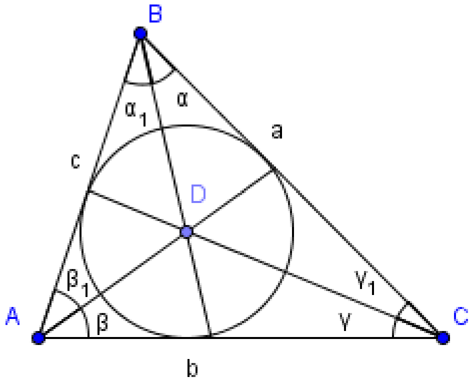
A bissetriz:

Bissetriz interna

Chama-se **bissetriz interna** de um triângulo, qualquer segmento de uma bissetriz de um ângulo interno que tem como extremos o vértice do ângulo e o ponto onde a bissetriz corta o lado oposto. Na figura, o segmento AM é a bissetriz interna relativa ao ângulo A (ou ao lado BC).



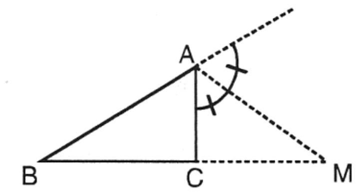
Todo triângulo tem três bissetrizes internas, cada uma relativa a um ângulo (ou a um lado). as três bissetrizes internas concorrem em um mesmo ponto, eqüidistante dos lados e denominado **incentro** do triângulo. Esse nome é dado pelo fato de que o incentro é o centro de uma circunferência inscrita no triângulo. Veja figura.



O ponto D é o incentro.

E ainda o incentro é um ponto equidistante dos lados do triângulo; basta lembrar que cada bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistante dos lados do ângulo. Essa afirmação nos permite calcular a área do triangulo em função do raio da circunferência, caso que veremos em breve em área das figuras planas.

Já a **bissetriz externa**...

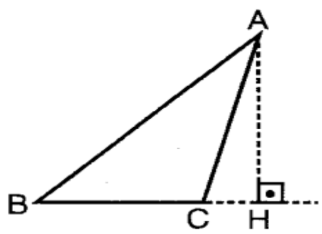


Chama-se **bissetriz externa** de um triângulo qualquer segmento de uma bissetriz de um ângulo externo que tem como extremos o vértice do ângulo e o ponto onde a bissetriz corta o prolongamento do lado oposto.

Na figura, o segmento AM é a bissetriz externa relativa ao ângulo A (ou ao lado BC).

Altura:

Chama-se **altura** de um triângulo qualquer segmento perpendicular a um de seus lados que tem como extremos o vértice oposto a esse lado e o pé da perpendicular sobre o suporte do lado. Todo triângulo tem três alturas, cada uma relativa a um vértice (ou a um lado). As retas suportes das três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, denominado **ortocentro** do triângulo.



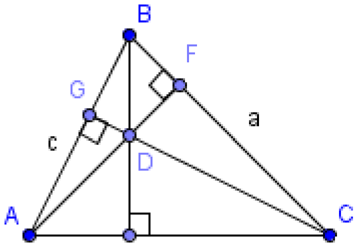
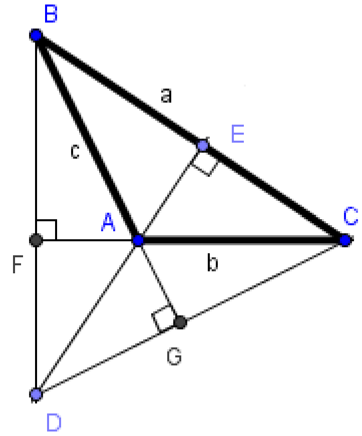
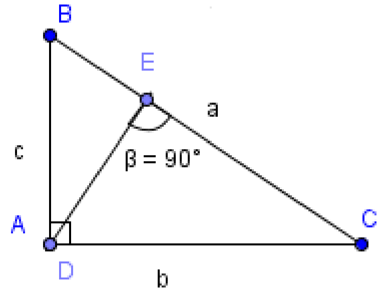
Na figura, o segmento AH é a altura relativa ao vértice A (ou ao lado BC).

Nas figuras a seguir, os segmentos AF, BE e CG são as alturas do triângulo ABC, relativas respectivamente aos lados BC, AC e AB. Elas concorrem no mesmo ponto D, que é o ortocentro do triângulo.

O ortocentro de um triângulo pode ser

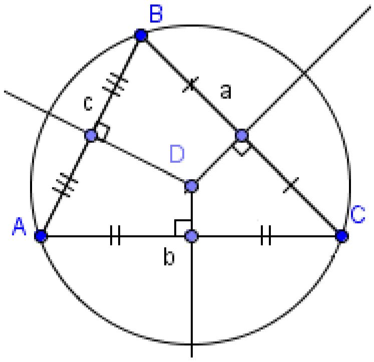
a) interior ao triângulo, se ele é acutângulo;

b) exterior ao triângulo, se ele é obtusângulo;
c) coincidente como vértice do ângulo reto, se ele é retângulo.

 Acutângulo.	 Obtusângulo.	 Retângulo.

Mediatriz:

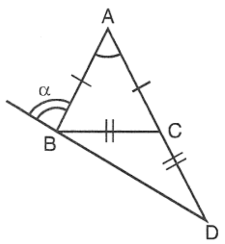
Apesar da mediatriz não ser um segmento notável do triângulo, a interseção das três mediatrizes é um ponto notável, e de muita importância. As mediatrizes dos três lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, eqüidistante dos vértices e denominado **circum-centro** do triângulo, (veja figura)



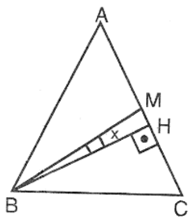
O ponto D é o circum-centro.

Exemplos:

1) Na figura, AB = AC e BC = CD. Sendo Â = 20°, vamos calcular α.



Resolução: sendo os triângulos ABC e BCD isósceles temos que os ângulos B = C e B' = D logo, B + C + A = 180° como A = 20° temos
2B = 180° - 20°,
B = 80° lembrando que B = C. o ângulo C para o triangulo ABC tem seu suplemento para o triangulo BCD sendo C', logo C + C' = 180° logo, C' = 100° como B' = D, temos B' + D + C' = 180° , 2B' = 80° , B' = 40° com os valores, temos que:
α + B + B' = 180° assim $\alpha = 60°$



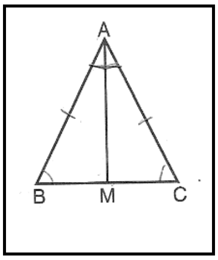
2) Seja ABC um triângulo isósceles de vértice A. Se Â = 40°, vamos determinar o ângulo formado pela altura BH e a bissetriz interna BM.

EXERCÍCIOS

1) As medidas dos três ângulos internos de um triângulo são 2x + 6°, x - 12° e 3x + 24°. Calcule a medida do ângulo externo adjacente ao maior dos ângulos internos.

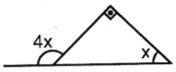
2) Os ângulos internos A, B e C de um triângulo são tais que A - B = 35 e B = 2C. Calcule o complemento de B.

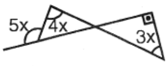
3) Na figura, AB = AC e BÂM = GÂM. Assinale as afirmativas **VERDADEIRAS.**

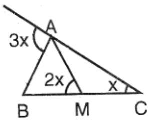


a) $\hat{B} = \hat{C}$
b) MB = MC
c) AM $\perp$ BC
d)AM < AB

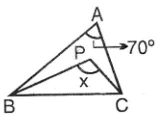
4) Calcule o ângulo x em cada caso:

a)


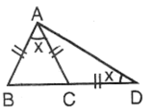
b)


c)


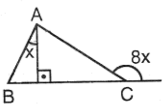
AM é bissetriz de $B\hat{A}C$

d)


BP e CP são bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$

e)


AB = AC = CD

f)


AC = BC

5) De cada um dos vértices de um dado polígono regular, podem-se traçar 9 diagonais distintas. Calcule a medida de cada ângulo externo e de cada ângulo interno desse polígono.

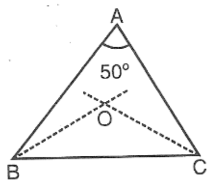
6) Determine o número de diagonais de um polígono regular cujos ângulos externos medem 40° cada um.

7) Se um polígono tem 44 diagonais, calcule a soma de seus ângulos internos.

8) Num polígono regular, o número de diagonais ultrapassa em 3 unidades o número de lados. Calcule a medida de cada um de seus ângulos internos.

9) Num triângulo retângulo, a altura e a mediana relativas à hipotenusa formam um ângulo de 40°. Calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo.

10) Determine, em graus, a medida do ângulo BÔC da figura, sendo O o incentro do triângulo.



GABARITO
1) 75° **2)** 32° **3)** todas verdadeiras **4)** a) 30° b) 22°30' c) 36° d) 125° e) 36° f) 18°   **5)** ângulo interno = 150º externo = 30º **6)** 27   **7)** 1620º **8)** 120º **9)** 25º e 120º **10)** 115º

DESIGUALDADES NO TRIÂNGULO

A respeito dos lados e ângulos de um triângulo, podem-se demonstrar certas desigualdades importantes.

Dois lados de um triângulo são desiguais se, e somente se, os ângulos opostos a esses dois lados são desiguais; ao maior lado se opõe o maior ângulo.

$$|b - c| < a < |b + c|$$
$$|a - c| < b < |a + c|$$
$$|a - b| < c < |a + b|$$

Podemos concluir, a partir desse teorema, que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que qualquer dos catetos.

Cada lado de um triângulo é menor que a soma é maior que a diferença (em módulo) dos outros dois.

Essas relações são conhecidas como **desigualdades triangulares.**

Exemplo:

1) Se dois lados de um triângulo medem 3 cm e 7 cm, qual medida X do terceiro lado ?

2) Podem os três lados de um triângulo medir 6 em, 8 em e 15 cm? Justifique.

3) Se 4, 9 e x são naturais que representam, em metros, as medidas dos lados de um triângulo, determine os possíveis valores de x em cada caso:
a) O triângulo é isósceles.
b) O triângulo é escaleno.

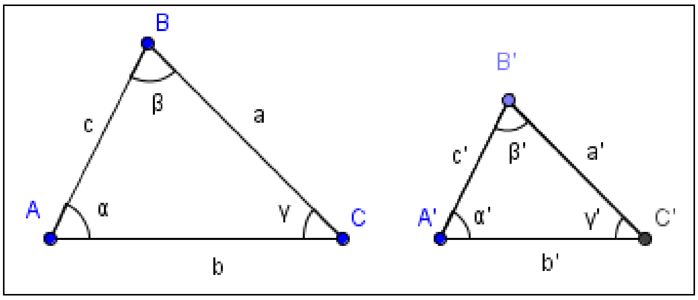
4) Um triângulo escaleno tem 13 cm de perímetro e um de seus lados mede 5 cm. Determine as medidas dos outros dois lados, sabendo que elas são, em cm, números inteiros.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

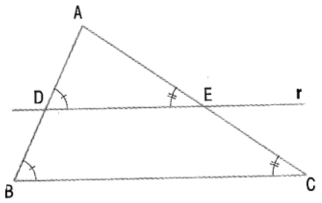
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k(\text{cosntante de proporcionalidade})$$



TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA

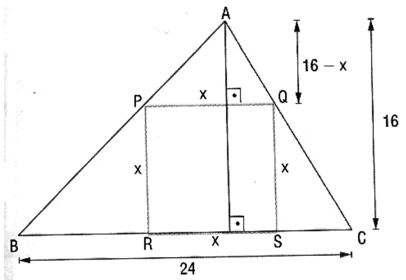
Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro.



$$\left.\begin{array}{l} r \,//\, \overline{BC} \\ r \cap \overline{AB} = \{D\} \\ r \cap \overline{AC} = \{E\} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

Exemplos:

1) A figura mostra um quadrado PQRS inscrito num triângulo ABC. Sendo BC = 24 cm e a altura relativa a essa base igual a 16 cm, vamos calcular a medida do lado desse quadrado.



2) Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo determina sobre o lado AB segmentos de 2 cm e 8 cm. Calcular os segmentos que esta reta determina sobre o lado AC = 15 cm.

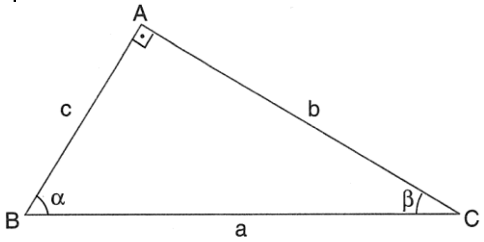
3) Dois triângulos T e T' são semelhantes. Os lados do triângulo T medem 18 cm, 22 cm e 30 cm. Achar os lados do triângulo T' sabendo-se que tem 175 cm de perímetro.

4) As bases de um trapézio medem 8 dm e 12 dm. Os lados não paralelos medem 3 dm e 5 dm. Prolongam-se os lados não paralelos até se encontrarem. Calcular os dois lados dos incógnitos do menor triângulo assim obtido.

5) As bases de um trapézio medem 12 m e 16 m e altura 9 m. Achar as distâncias do ponto de interseção das diagonais às bases do trapézio.

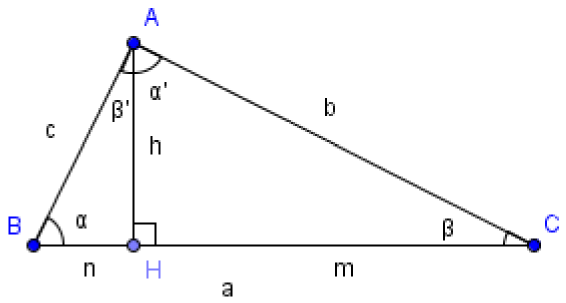
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Todo triângulo retângulo possui dois ângulos agudos complementares e um ângulo reto, ao qual se opõe o seu maior lado, chamado hipotenusa os outros dois lados são denominados catetos.



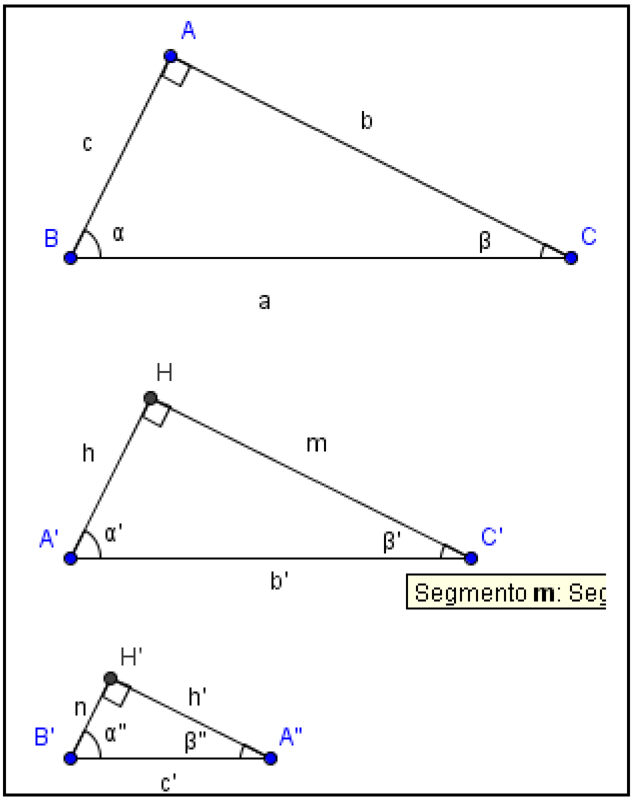
a: hipotenusa
b, c : catetos

A perpendicular a $\overline{BC}$, traçada por A, é a altura h, relativa à hipotenusa do triângulo.
BH = n e CH = m são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



a = n + m

Observando as medidas dos ângulos, concluímos que os três triângulos formados são semelhantes.



$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \sim \Delta HBA$$

Considerando a semelhança entre os dois primeiros triângulos:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b'} \Rightarrow \begin{cases} cm = bh \\ b^2 = ma \\ cb' = ah \end{cases}$$

Pela semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulo:

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{h'} = \frac{a}{c'} \Rightarrow \begin{cases} ch' = nb \\ bc' = h'a \\ c^2 = na \end{cases}$$

Considerando agora a semelhança entre os dois últimos triângulos, podemos escrever:

$$\frac{h'}{n} = \frac{m}{h} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = mn \\ mc' = b'h \\ h'c' = b'n \end{cases}$$

Assim, podemos afirmar que em todo triângulo retângulo:

(I) O quadrado de cada cateto vale o produto da sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa.
(II) O produto da hipotenusa pela altura relativa a ela vale o produto dos catetos.
(III) O quadrado da altura relativa à hipotenusa vale o produto entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Lembrando que a = m + n e considerando ainda as relações (I), temos:

$$\frac{\left.\begin{array}{r} am = b^2 \\ an = c^2 \end{array}\right\} +}{am + an = b^2 + c^2} \Rightarrow a(m+n) = b^2 + c^2 \Rightarrow \; a^2 = b^2 + c^2$$

Esta última – é muito importante – relação é conhecida como teorema de Pitágoras e é assim interpretada:

Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Exemplos:

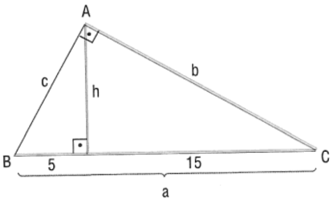
1) Considerando que os catetos AB e AC medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm, determinar a medida da altura relativa à hipotenusa.

2) Sejam 2cm e 3 cm as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa. Calcular as medidas dos catetos.

EXERCÍCIOS

1) Calcule a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa no triângulo retângulo de catetos 8 cm e 12 cm.

2) Calcule as medidas b, c e h indicadas no triângulo retângulo a seguir:



3) Dado um triângulo eqüilátero de lado a, calcule sua altura.

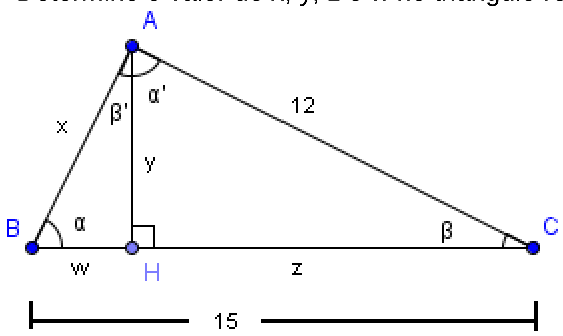
4) Num triângulo retângulo, a razão entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa é $\frac{9}{16}$. Sabendo que a hipotenusa mede 10 cm, calcule a medida dos catetos.

5) Dado um quadrado de lado a, calcule a medida das diagonais desse quadrado.

6) Durante um treinamento, dois maratonistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em sentido leste e outro em sentido norte. Determine a distância que os separa depois de 2 h sabendo que as velocidades dos atletas são de 20 km/h e 25 km/h, respectivamente.

7) Uma torre de televisão de 40 m de altura vai ser sustentada por três cabos de mesmo comprimento. Os cabos serão presos na torre a 25 m de altura e os três ganchos no solo para prender os cabos estarão a 6 m da base da torre. Quantos metros de cabo, aproximadamente, serão necessários para a sustentação da torre?

8) Determine o valor de x, y, z e w no triângulo retângulo abaixo.



Gabarito:

1) $H = \frac{24\sqrt{13}}{13}; m = \frac{16\sqrt{13}}{13}$

$n = \frac{36\sqrt{13}}{13}$

2) $b = 10\sqrt{3}, c = 10, h = 5\sqrt{3}$

3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ 4) 6 cm e 8 cm

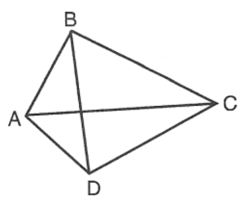
5) $a\sqrt{2}$ 6) aprox. 64 km

7) aprox. 77,2 km

8) $x = 9$, $y = \frac{36}{5}$, $z = \frac{48}{5}$, $w = \frac{27}{5}$

QUADRILÁTEROS CONVEXOS

Quadrilátero convexo é todo polígono convexo de quatro lados.



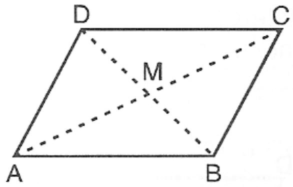
Todo quadrilátero tem **2** diagonais.

Na figura, vemos o quadrilátero ABCD, de diagonais AC e BD.
A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é **360°**.

Alguns quadriláteros, por possuírem propriedades muito específicas, recebem denominações especiais.

PARALELOGRAMO

Chama-se paralelogramo todo quadrilátero cujos lados são dois a dois paralelos.



$$\left.\begin{matrix} AD \,//\, BC \\ AB \,//\, DC \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow ABCD \text{ e paralelogramo}$$

Os paralelogramos possuem as seguintes propriedades

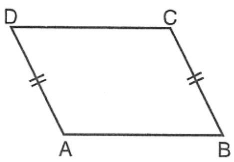
1) Os lados opostos são congruentes: AB = DC e AD = BC.

2) Os ângulos opostos são congruentes:

3) Os ângulos não-opostos são suplementares:

4) As diagonais se cortam ao meio: AM = MC e BM = MD.

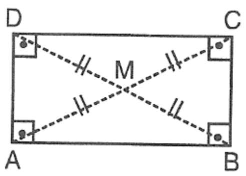
Se um quadrilátero tem dois lados opostos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo.



ABCD é um paralelogramo
(AB = DC e AB // DC).

RETÂNGULO

Chama-se **retângulo** todo paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (figura)



É claro que, sendo A + B + C + D = 360°, teremos, necessariamente, para o retângulo:

$$\boxed{\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°}$$

Em outras palavras, retângulo é todo paralelogramo que tem os quatro ângulos retos.
Além de o retângulo ter as propriedades dos paralelogramos, pode-se provar que

As diagonais de um retângulo são congruentes : AC = BD
Como as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio, podemos concluir, ainda observando a figura, que AM = MC = MB = MD.
A partir daí, podemos enunciar o seguinte teorema:

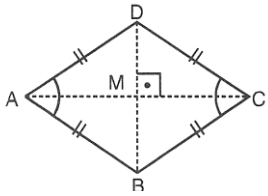
Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é a metade da hipotenusa.

De fato, na figura, ABD é um triângulo retângulo de hipotenusa BD e AM é a mediana relativa à hipotenusa. É claro que, sendo AM = MD = MB.

$$\boxed{AM = \frac{BD}{2}}$$

LOSANGO

Chama-se losango todo paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

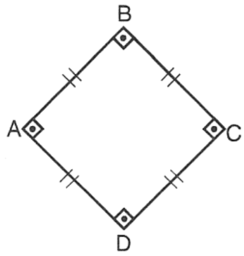


Na figura, o paralelogramo ABCD é um losango, pois AB = BC = CD = DA.

Além de o losango ter as propriedades dos paralelogramos, vamos provar o teorema:

As diagonais de um losango são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos.

QUADRADO



Chama-se quadrado todo paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (retos) e os quatro lados congruentes.

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$$

AB = BC = CD = DA, donde ABCD é um quadrado.

Um quadrado é, ao mesmo tempo, retângulo e losango. Valem, portanto, para o quadrado, todas as propriedades vistas para o paralelogramo, o retângulo e o losango.

É claro que o único tipo de quadrilátero regular é o quadrado.

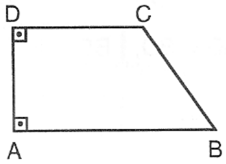
TRAPÉZIOS

Chama-se **trapézio** todo quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos e os outros dois lados não--paralelos.

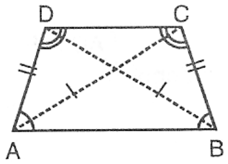
Os lados paralelos são as **bases** e a distância entre eles é a altura do trapézio.

Na figura, sendo AB // CD e AD não-paralelo a BC, o quadrilátero ABCD é um trapézio de bases AB e CD e altura CH.

Se um dos ângulos de um trapézio é reto, ele é chamado **trapézio retângulo** (figura); neste caso, haverá necessariamente um outro ângulo reto no trapézio e o lado adjacente aos dois ângulos retos (AD, no caso) é altura do trapézio.



trapézio retângulo



trapézio isósceles

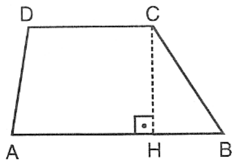
Se os lados não-paralelos de um trapézio são congruentes, ele é chamado **trapézio isósceles**; é o caso do trapézio da figura, em que AD = BC.

Propriedades dos trapézios isósceles:

a) as diagonais são congruentes (AC = BD);

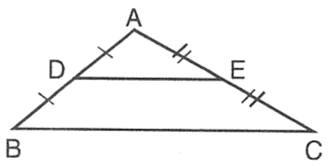
b) **os ângulos de uma mesma base são congruentes (A = B e C = D).**

Um trapézio não-isósceles pode ser chamado **trapézio escaleno**.



BASES MÉDIAS

Chama-se **base média de um triângulo** todo segmento cujos extremos são os pontos médios de dois de seus lados.

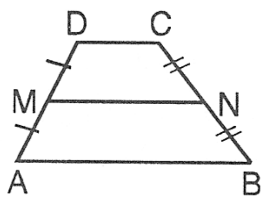


Na figura, sendo AD = BD e AE = CE, o segmento DE é base média do triângulo ABC, relativa à base BC.

Toda base média de um triângulo é paralela à respectiva base e é a metade dessa base.

$$\boxed{DE//BC \text{ e } DE = \frac{BC}{2}}$$

Chama-se **base média de um trapézio** o segmento cujos extremos são os pontos médios dos lados não-paralelos do trapézio.



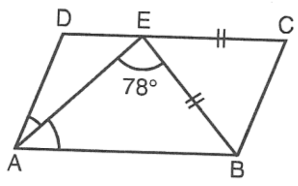
Na figura, sendo AM = MO e BN = NC, o segmento MN é a base média do trapézio ABCD. A respeito da base média de um trapézio, pode-se provar o seguinte teorema:

A base média de um trapézio é paralela às bases e é a média aritmética das bases.

$$\boxed{MN//AB \text{ e } MN = \frac{AB+CD}{2}}$$

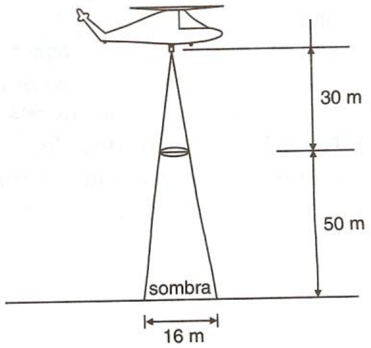
Exemplo:

1. Na figura ABCD é um paralelogramo, AE é bissetriz de Â e EB = EC. Calcule o ângulo C.



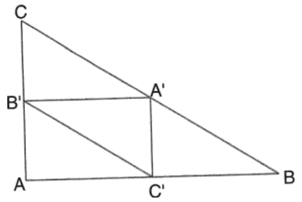
REVISÃO:

1) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do Exército, situado aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura. Pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em metros, aproximadamente:



a) 3,0 b) 3,5 c) 4,0 d) 4,5 e) 5,0

2) (UE-RJ) Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo ABC, obtém-se um novo triângulo A'B'C', como mostra a figura.



Se S e S' são, respectivamente, as áreas de ABC e A'B'C', a razão $\frac{S}{S'}$ equivale a:

a) 4 b) 2 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{2}$

3) (PUC-RS) Para medir a altura de uma árvore, foi usada uma vassoura de 1,5 m, verificando-se que, no momento em que ambas estavam em posição vertical em relação ao terreno, a vassoura projetava uma sombra de 2 m e a árvore, de 16 m. A altura da árvore, em metros, é:

a) 3,0 b) 8,0 c) 12,0 d) 15,5 e) 16,0

4) (UF-MA) O ângulo agudo de um losango mede 60° e sua diagonal maior tem medida $3\sqrt{2}$ m. Nessas condições, a medida do lado do losango é:

$a)2m$

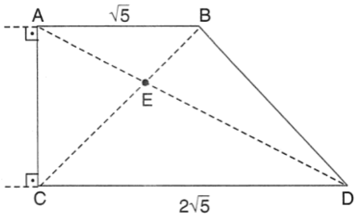
$b)3m$

$c)\sqrt{2}m$

$d)\sqrt{3}m$

$e)\sqrt{6}m$

5) (Mackenzie-SP) Na figura, se o triângulo ABC é isósceles, a medida de AE é



$a)\frac{4}{3}$

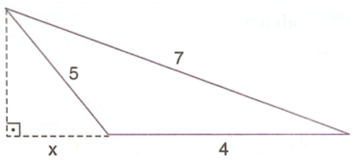
$b)\sqrt{3}$

$c)\frac{2}{3}$

$d)\sqrt{2}$

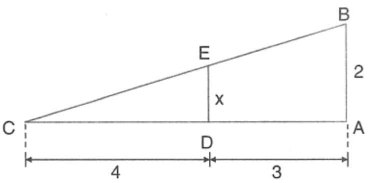
$e)\frac{5}{3}$

6) O valor de x, no triângulo, é:



a) 4,15 b) 1 c) 7,25 d) 5 e) 4

7) Na figura abaixo, o segmento AB é paralelo ao segmento DE. O valor de x é:



$a)\frac{2}{3}$ $b)\frac{8}{3}$ $c)\frac{2}{7}$ $d)\frac{8}{7}$ $e)1$

8) Se num triângulo retângulo a medida da mediana relativa à hipotenusa é 5 cm, então a hipotenusa mede:

a) 8 cm b) 9 cm c) 10 cm d) 11 cm e) 12 cm

9) Na figura abaixo, $\frac{PB}{PC} = \frac{1}{3}$. Se PA = 12 cm, o perímetro do triângulo APC, em cm, é igual a:

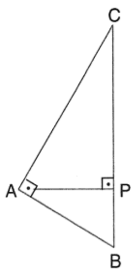
$a)6\sqrt{3}$

$b)6\left(2+\sqrt{3}\right)$

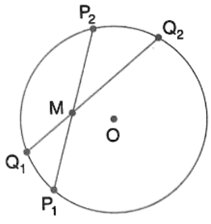
$c)12\left(3+\sqrt{3}\right)$

$d)24\left(1+\sqrt{3}\right)$

$e)48\sqrt{3}$

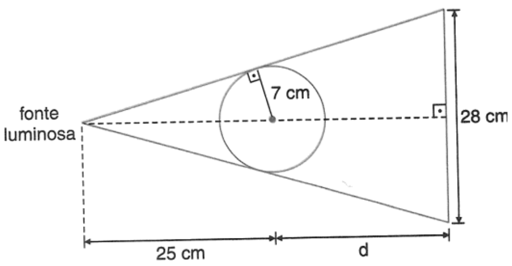


10) A circunferência da figura tem centro no ponto O e M é o ponto de interseção das cordas $\overline{P_1P_2}$ ë $\overline{Q_1Q_2}$. Se $P_1M = 4cm$, $MP_2 = \left(k+1\right)cm$, $Q_1M = 3cm$ e $MQ_2 = \left(3k-7\right)cm$, então a corda $\overline{Q_1Q_2}$, em cm, mede:



a) 5 b) 8 c) 11 d) 14

11) (UF-GO) Uma fonte luminosa a 25 cm do centro de uma esfera projeta sobre uma parede uma sombra circular de 28 cm de diâmetro, conforme figura abaixo.



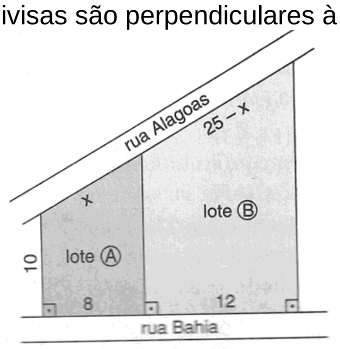
Se o raio da esfera mede 7 cm, a distância (d) do centro da esfera até a parede, em centímetros é:

a) 23 c) 28 e) 35
b) 25 d) 32

12) (UF- RN) Uma escada de 13,0 m de comprimento encontra-se com a extremidade superior apoiada na parede vertical de um edifício e a parte inferior apoiada no piso horizontal desse mesmo edifício, a uma distância de 5,0 m da parede. Se o topo da escada deslizar 1,0 m para baixo, o valor que mais se aproxima de quanto a parte inferior escorregará é:

a) 1,0 m c) 2,0 m
b) 1,5 m d) 2,6 cm

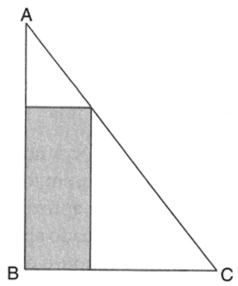
13) (Ucsal- BA) Na figura abaixo têm-se dois lotes de terrenos planos, com frentes para duas ruas e cujas divisas são perpendiculares à rua Bahia.



Se as medidas indicadas são dadas em metros, a área da superfície aproximada dos dois lotes, em metros quadrados é:

a) 350 b) 380 c) 420 d) 450 e) 480

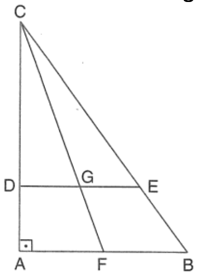
14) Considere todos os retângulos inscritos no triângulo retângulo ABC, dispostos da maneira como mostra a figura abaixo:



Se AB = 24 cm e BC = 18 cm, o maior valor q pode obter para a área de tais retângulos, em metros quadrados, é:

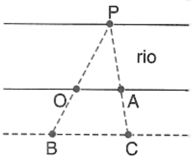
a) 96 b) 108 c)116 d)128 e) 136

15) (Fuvest -SP) Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos AB = 4 e AC = 5. O segmento DE é paralelo a AB, *F* é um ponto de AB e o segmento CF intercepta DE no ponto G, com CG = 4 e GF = 2. Assim, a área do triângulo CDE é:



$a)\frac{16}{3}\quad b)\frac{35}{6}\quad c)\frac{39}{8}\quad d)\frac{40}{9}\quad e)\frac{70}{9}$

16) (Vunesp-SP) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto *P,* localizado na outra margem sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra de tal forma que P, O e *B* estão alinhados entre si e *P, A* e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, OA = 25 m, BC = 40 m e OB = 30 m, conforme figura.



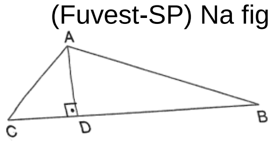
A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é:

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45 e) 50

17) (UF- PI) Três cidades, P, Q e R, estão localizadas em um mapa formando um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é PR A distância real entre Q e R é 3 km e a distância no mapa entre P e Q é 4 em. Se a escala usada no mapa é 1 : 100000, a distância real, em quilômetros, entre P e R é:

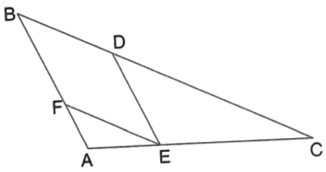
a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

18) (Fuvest-SP) Na figura abaixo, tem-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6. O valor de CD é:



$a)\frac{17}{12}\quad b)\frac{19}{12}\quad c)\frac{23}{12}\quad d)\frac{25}{12}\quad e)\frac{29}{12}$

19) (Unit-SE) Na figura abaixo temos o losango BDEF inscrito no triângulo ABC.



Se AB = 3 cm, BC = 6 cm e AC = 4 cm, o perímetro do losango, em cm, é:

a) 2 c) 6 e) 10

b) 4 d) 8

20) (Fuvest-SP) Em uma semicircunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo eqüilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo ACB intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda AD é:

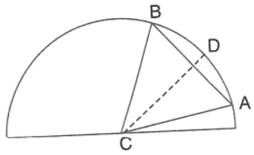
$a) R\sqrt{\ -2\sqrt{\ }}$

$b) R\sqrt{\sqrt{\ } -3\sqrt{\ }}$

$c) R\sqrt{\sqrt{\ } -2}$

$d) R\sqrt{\sqrt{\ } -3}$

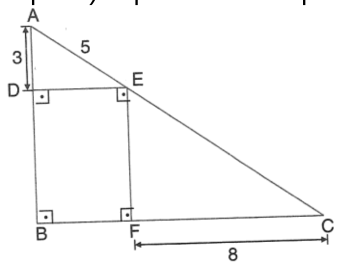
$e) R\sqrt{\ -3\sqrt{\ }}$



21) (UF-RN) Um grande vale é cortado por duas estradas retilíneas, E_1 e E_2, que se cruzam perpendicularmente, dividindo-o em quatro quadrantes. Duas árvores que estão num mesmo quadrante têm a seguinte localização: a primeira dista 300 m da estrada E_1 e 100 m da estrada E_2, enquanto a segunda se encontra a 600 m de E_1 e a 500 m de E_2.
A distância entre as duas árvores é:

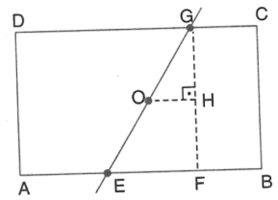
a) 200 m
b) 300m
c) 400 m
d) 500 m

22) (Umesp-SP) O perímetro do quadrilátero BDEF é igual a:



a) 12 b) 10 c) 16 d) 20 e) 24

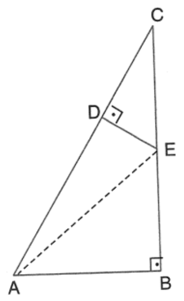
23) (Mackenzie-SP) No retângulo ABCD da figura, de área 60 cm^2, o ponto O é o encontro das diagonais, EF = 4 cm e GH = 3 cm.



A área do retângulo AFGD, em cm^2 é:

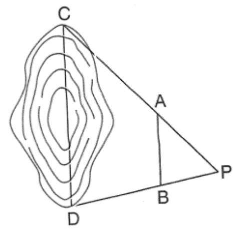
a) 42 c) 55 e) 64
b) 49 d) 36

24) (Fuvest-SP) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = e BE = 2DE. Logo, a medida de AE é:



$a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $b)\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $c)\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ $d)\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ $e)\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

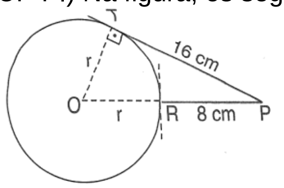
25) (U. F. Viçosa-MG) Para determinar o comprimento de uma lagoa, utilizou-se o esquema indicado



pela figura ao lado, onde os segmentos AB e CD são paralelos.
Sabendo-se que AB = 36 m, BP = 5 m e DP = 40m, o comprimento CD da lagoa, em metros é:

a) 188 c) 248 e) 288
b) 368 d) 208

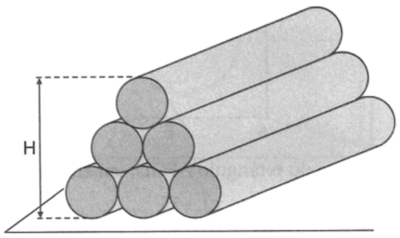
26) (UF-PI) Na figura, os segmentos de reta RP e TP medem respectivamente 8 cm e 16 cm.



Se TP é tangente à circunferência em *T,* então a medida do raio, em centímetros, é:

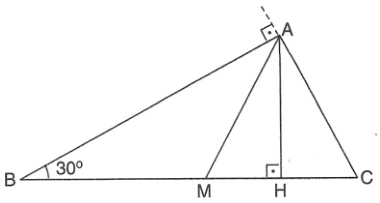
a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

27) (UF- RO) A fórmula que determina a altura H de uma pilha de tubos, todos com forma cilíndrica circular reta e com raio externo R, conforme a figura, é:



a) H$\sqrt{\ }$= R (
b) H $\sqrt{\ }$=
c) H $\sqrt{\ }$=
d) H $\sqrt{\ }$=
e) H $\sqrt{\ }$=

28) (Mackenzie-SP) No triângulo retângulo ABC da figura, AM é a mediana e AH é a altura, ambas relativas à hipotenusa.
Se BC = 6 cm, a área do triângulo AMH, em centímetros quadrados, é:

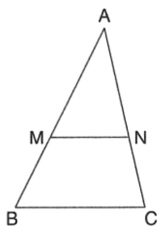


$a)\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\quad b)\dfrac{8\sqrt{3}}{5}\quad c)\dfrac{9\sqrt{3}}{8}\quad d)\dfrac{5\sqrt{3}}{8}\quad e)\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

29) (Cefet-MG) Em um triângulo isósceles, seja ***a*** a medida de seus lados iguais, ***b*** a medida do terceiro lado e *h* a medida de sua altura, relativa ao lado *b.* Se *h, b* e *a* formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então a área do triângulo será igual a:

$a)\dfrac{\sqrt{3}b^2}{4}\quad b)\dfrac{\sqrt{3}h^2}{4}\quad c)\dfrac{b^2}{4}\quad d)\dfrac{15b^2}{8}\quad e)\dfrac{8h^2}{15}$

30) (Cefet-MG) No triângulo ABC, um segmento M paralelo a BC, divide o triângulo em duas regiões mesma área, conforme representado na figura.



A razão $\dfrac{AM}{AB}$ a: $a)\dfrac{1}{2}\quad b)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad c)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad d)\dfrac{\sqrt{3}}{3}\quad e)\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$

Gabarito:

a) 1 , 2 , 11, 13, 20, 23, 26,
b) 6, 14,30
c) 3, 8, 9, 10, 12,17, 24, 28,
d) 7, 15, 19, 21, 22, 27,
e) 4, 5, 16, 18, 25, 29,

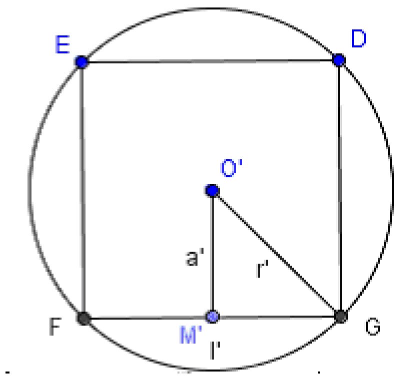
POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Introdução

Nas figuras abaixo há dois polígonos regulares (todos os lados e todos os ângulos congruentes entre si) inscritos, cada um, num circunferência.

Cálculo da medida do lado e do apótema de um polígono regular em função do raio da circunferência

Quadrado inscrito em uma circunferência



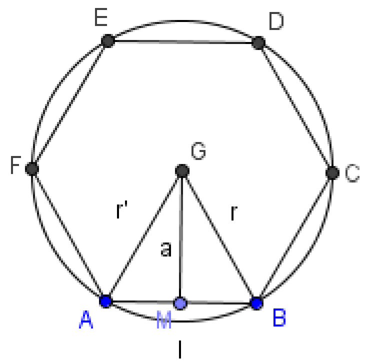
a) Lado $l_4 = r\sqrt{2}$

b) Apótema $a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

Exemplo:

1) Calcular o lado e o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de 30 cm de raio.

Hexágono regular inscrito em uma circunferência



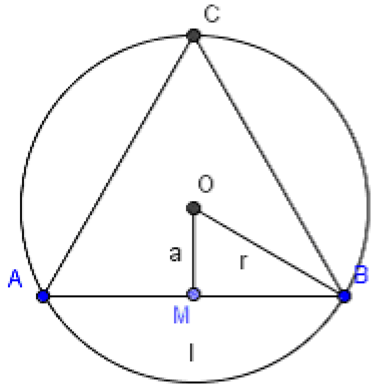
a) Lado $l_6 = r$

b) Apótema $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

Exemplo:

2) Calcular o lado do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência

Triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência



a) Lado $l_3 = r\sqrt{3}$

b) Apótema $a_3 = \dfrac{r}{2}$

Exemplo:

3) Calcular o lado e o apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de 35 cm de lado

Exercícios:

1) Numa circunferência de 10 cm de raio, calcule as medidas do lado e do apótema de um :

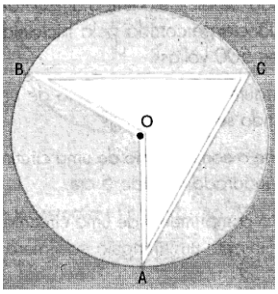
a) Triângulo eqüilátero inscrito;
b) Quadrado inscrito
c) Hexágono regular inscrito

2) Um triângulo eqüilátero de lado 5 cm está inscrito numa circunferência de raio r. Qual a medida do diâmetro dessa circunferência ?

3) Determine o perímetro do hexágono regular inscrito numa circunferência de raio igual a 5 cm.

4) Determine a razão entre o apótema de uma quadrado e o lado de um triângulo eqüilátero, ambos inscritos numa circunferência de raio igual a 6 cm.

5) Para fins beneficentes, foi organizado um desfile de modas num salão em forma de círculo, com 20 m de raio. A passarela foi montada de acordo com a figura, sendo as passarelas CA e CB os lados que correspondem a um triângulo eqüilátero inscrito na circunferência. No espaço sombreado, ocupado pela platéia, foram colocadas cadeiras, sendo uma cadeira por metro quadrado e um ingresso para cada cadeira . Adotando $\sqrt{3} = 1,73$ determine quantos metros cada modelo desfilou, seguindo uma única vez o roteiro BC, CA, AO, OB.



6) A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é:

$a)\sqrt{3}$

$b)2$

$c)2,5$

$d)3$

$e)4$

7) O lado de um quadrado inscrito em um disco de raio R é a – b e o lado do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo disco é a + b. Então $\dfrac{b}{a}$ vale:

$a)5-2\sqrt{6}$

$b)\dfrac{7}{3}$

$c)5+2\sqrt{6}$

$d)\sqrt{13}$

8) Um quadrado cujo perímetro mede 8 m está inscrito num disco. A altura do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo disco mede, em metros:

$a)3\sqrt{2}/2$

$b)3\sqrt{3}/2$

$c)2\sqrt{2}/2$

$d)2\sqrt{3}/3$

$e)4\sqrt{2}$

GABARITO

1) a) 17,32 cm e 5 cm
b) 14,14 cm e 7,07 cm
c) 10cm e 8,66 cm

2) 5,77 cm **3)** 30 cm **4)** √6/3 **5)** 109,2 m **6)** b **7)** a **8)** a