Capítulo 3

Polinômios

1- Introdução:

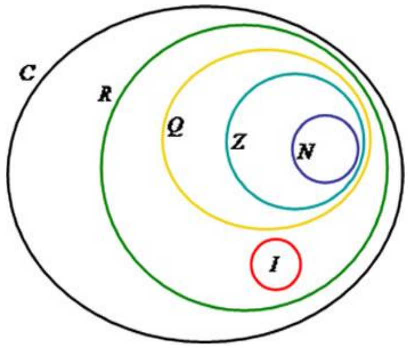
Quando resolvemos a equação de 2º grau $x^2 + 2x + 5 = 0$, por exemplo, utilizando a fórmula de Bháskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.5}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de x, é preciso calcular a raiz quadrada de -16. Em R, porém, isso é impossível, pois não existe um numero m real tal que m² = -16.

A necessidade de obter uma solução para esse tipo de problema levou os matemáticos a procurarem novos conjuntos em que "o quadrado de certo elemento pudesse ser negativo".

Muitos matemáticos procuraram dar uma solução para esse problema, principalmente os italianos Girolamo Cardano (1501-1576) e Raphael Bombelli (1526-1573), no século XVI, mas foi Gauss (1777-1855) quem fez maiores avanços nesta área.



2- Números Complexos

Para trabalharmos com os números complexos, C, usaremos i (chamado de unidade imaginária) representando o valor de $\sqrt{-1}$. Desta forma, poderemos representar todas as raízes de números negativos em função de i. Os números complexos são representados na forma Z= a + bi, onde a é denominado de 'parte real' e b a 'parte imaginária'. Ambos são números reais.

Observação 1: Potência de i

$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = (-1)i = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 i = 1i = i$$
$$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$$
$$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$$
$$i^8 = i^4 i^4 = 1$$

Observe que as potências de i começam a se repetir depois de i^4. De modo geral, conclui-se que, dado i elevado a qualquer potência maior que 4, basta dividir este número por 4. O resto encontrado será a nova potência.

Observação 2: Conjugado de um número Complexo

Dado o número complexo z = a + bi, o seu conjugado será z = a – bi.

Observação 3: Módulo de um número Complexo

Dado o número complexo z = a + bi, o seu módulo será $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exercícios *(Números Complexos)*

1) Determine o valor de x, real, para que o número complexo:
   a) $(x^2 - x) + 3i$ seja um número imaginário puro
   b) $(x^2 - 1) + i$ seja um número imaginário puro
   c) $x + (x^2 - 4)i$ seja um número real
   d) $x + xi$ seja o número real 0
2) Efetue:
   a) i^9
   b) i^{14}
   c) i^{60}
   d) i^{1035}
   e) $(-i)^{16}$

Gabarito

1) .
   a) 0 ou 1
   b) ±1
   c) ±2
   d) 0
2) .
   a) i
   b) -1
   c) 1
   d) $-i$
   e) 1

3- Definição de polinômios

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Em que:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes.

n é um número inteiro positivo ou nulo

O maior expoente de x, com coeficiente não-nulo, é o grau da expressão.