

5- Escalonamento

Classificado o sistema como SPD ou SPI, pode ser feito o escalonamento, que consiste basicamente em deixar as equações do sistema na forma:

$$\begin{cases} a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1 = b \\ c_{n-1} x_{n-1} + \cdots + c_1 x_1 = d \\ \vdots \\ e_1 x_1 = f \end{cases}$$

Ou seja, o sistema deve ter diversas equações, cada uma com um número crescente ou decrescente de incógnitas, de modo que a última se reduza a apenas uma incógnita. Isso é feito com as transformações adequadas – sempre é possível "zerar" uma das incógnitas na equação pela soma/subtração da equação anterior que contenha essa incógnita. Exemplificando:

$$\begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ 4x + 8y + 1z = -7 \\ -2x - 10y + 2z = 0 \end{cases}$$

Inicialmente, vamos eliminar o termo composto pela variável x nas duas últimas equações, a partir da primeira. Para tanto, inicialmente multiplicamos a segunda equação por -2 e a terceira por 4 . Depois, somamos as equações a primeira e obtemos:

$$\begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ -8x - 16y - 2z = 14 \\ -8x - 40y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ 0x - 12y + 3z = -9 \\ 0x - 36y + 13z = -23 \end{cases}$$

A continuar o processo, pode-se trabalhar a segunda e a terceira equação linear para obter na terceira uma equação a uma variável, que arbitrariamente escolhemos ser z . Para tanto, vamos multiplicar a segunda equação por -3 , e então somá-la à terceira equação:

$$\begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ 36y - 9z = 27 \\ -36y + 13z = -23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y + 5z = -23 \\ 36y - 9z = 27 \\ 0y + 4z = 4 \end{cases}$$

A partir desta última equação, e em geral em qualquer sistema resolvido por escalonamento, é possível encontrar o valor de uma primeira variável, no caso específico:

$$4z = 4 \Rightarrow z = 1$$

Substituindo o valor encontrado para z na equação da segunda linha, temos:

$$36y - 9z = 27 \Rightarrow 36y - 9(1) = 27 \Rightarrow y = 1$$

Por fim, é possível substituir esses dois valores na primeira equação:

$$8x + 5y + 4z = -23 \Rightarrow 8x + 5(1) + 4(1) = -23 \Rightarrow 8x = -32 \Rightarrow x = -4$$

A solução do sistema é, portanto, **$(-4, 1, 1)$** .

Assim resolvem-se os sistemas lineares pela técnica do escalonamento: progressivamente vão obtendo-se os valores das variáveis, até que todas as equações possam ser resolvidas. Trata-se de um método prático, que inclusive é utilizado em computadores para resolução de sistemas lineares (embora o enfoque computacional seja um tanto mais complicado e envolva matrizes).