12- Relações de Girard

São formulas matemáticas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

Na equação do 2º grau:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a \neq 0$ e x_1 e x_2 são as raízes.

As relações que podemos tirar são:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = -b/a \quad e \quad x_1x_2 = c/a}$$

Na equação de 3º grau:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ e x_1, x_2, x_3 suas raízes.

As relações que podemos tirar são:

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 = -b/a}$$

$$\mathbf{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c/a}$$

$$\mathbf{x_1x_2x_3 = -d/a}$$

Exercícios *(Relações de Girard)*

1) A equação $3x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$ admite raízes x_1, x_2, x_3. Escreva as relações de Girard para essa equação.
2) Os números -2 e 3 são duas raízes da equação $2x^3 - x^2 + mx + n = 0$, em que m e n pertencem aos reais. Determine a terceira raiz da equação e os valores de m e n.
3) (EEM-SP) Determine as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$ sabendo que uma delas é dupla.
4) As raízes da equação polinomial $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ estão em PA. Calcule essas raízes.
5) Resolva a equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.
6) Qual é o valor de k na equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ para que as raízes da equação estejam em PA?

Gabarito

1) $x_1 + x_2 + x_3 = -2/3$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1/3$; $x_1x_2x_3 = 1$
2) $x_3 = -1/2$; $m = -13$; $n = -6$
3) -1 e 2
4) 3, 5 e 7
5) {1, -2, 4}
6) 8

13- Pesquisa de raízes racionais

Teorema: Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o racional $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{Z}^*$ (p e q primos entre si) é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q divisor de na.

EXEMPLO:

Vamos resolver a equação x^3 - 7x + 6.

Resolução:

Pela equação dada, temos a_0 = 6 e a_n = 1.

p é divisor de 6 → { -1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6}

q é divisor de 1 → {-1, 1}

p/q → {-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6}

Fazendo a pesquisa, temos:

p(1) = 0 → 1 é raiz

Então, após aplicar a raiz 1 no dispositivo de Briot-Ruffini, encontraremos uma esquação de segundo grau: x^2 + x – 6. Resolvendo a equação obtemos como solução para a cúbica: S = {-3, 1, 2}

Exercícios *(pesquisa de raízes racionais)*

1) Pesquise as raízes racionais das equações algébricas:
   a) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$
   b) $4x^4 – 4x^3 - 3x^2 + 4x – 1 = 0$
   c) $4x^3 - 5x + 1 = 0$
   d) $2x^3 - 7x^2 + 7x – 2 = 0$
2) (PUC-SP) Quais são as raízes da equação $3x^3 - 13x^2 + 13x – 3 = 0$?
3) (ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação $x^3 + 4x^2 + 2x – 4 = 0$?
4) Determine as raízes da equação $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x – 3 = 0$

Gabarito

1) .
   a) 1, -1, ½
   b) 1, -1, ½
   c) 1
   d) 1, 2, ½
2) 1, 3, 1/3
3) -2
4) 1, -3, i, -i