9- Teorema do Fator

Se c é uma raiz de um polinômio p(x), de grau $n>0$, então $x – c$ é um fator de p(x).

Pelo teorema de D'Alembert, a divisão de p(x) por $x – c$ resulta um quociente q(x) e um resto p(c) tal que:

$p(x) = (x – c)q(x) + p(c)$

Se c é uma raiz de p(x), então $p(c) = 0$ e temos:

$p(x) = (x – c)q(x)$

Portanto, $x – c$ é um fator de p(x).

Exercícios *(Teorema do Fator)*

1) (Fumec-MG) Determine m e n de modo que $p(x) = 2x^4 – x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $(x-2)(x+1)$.
2) (FGV-SP) Determine o produto Mn sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ é divisível por $(x – 1)(x – 2)$.
3) (Unicamp-SP) Determine o quociente e o resto da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

Gabarito

1) $m = -6$, $n = 1$
2) -66
3) $q(x) = x^{98} + x^{96} + ... + x^2 + 1$; $r(x) = x + 2$

10- Teorema Fundamental da Álgebra

Toda equação algébrica p(x) = 0 de grau n $(n \geq 1)$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

11- Decomposição em fatores de primeiro grau

Usando o TFA podemos demonstrar que todo polinômio pode ser decomposto num produto de n fatores de 1º grau.

$p(x) = a_n(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots (x - x_n)$

Naturalmente: $p(x) = a_n(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots (x - x_n) = 0$

Ou seja, toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas.

Exercícios *(decomposição em fatores de primeiro grau)*

1) Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, calcule o valor de c e o conjunto solução da equação.
2) Resolva as equações:
   a) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ sabendo que duas de suas raízes são -1 e 1;
   b) $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ sabendo que -2 é uma de suas raízes.
3) (PUC-RS) Se os números -3, a e b são as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, calcule o valor de a + b.
4) Encontre os valores de a, b e c sabendo que 2, 4 e -3 são raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
5) (Vunesp) Se m é raíz do polinômio real $p(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32$, determine o resto da divisão de p(x) por x – 1.

Gabarito

1) c = - 6; S = {-3, -1, 2}
2) .
   a) {-1, 1, 1 + i, 1 - i}
   b) {-2, 3, 6}
3) -2
4) a = -3, b = -10, c = 24
5) 30