Fundamentos de Matemática Elementar (MAT133)

Notas de aulas

Maria Julieta Ventura Carvalho de Araújo
(Colaboração: André Arbex Hallack)

Março/2010

Índice

1 Conjuntos **1**

1.1 A noção de conjunto e alguns exemplos 1

1.2 Subconjuntos e a relação de inclusão 5

1.3 Álgebra dos conjuntos 7

1.4 Exercícios 10

2 Relações **13**

2.1 Relações Binárias 13

2.2 Relações de equivalência 18

2.3 Relações de ordem 21

2.4 Exercícios 25

3 Funções **29**

3.1 Conceitos básicos e exemplos 29

3.2 Funções invertíveis: injetoras e sobrejetoras 34

3.3 Composição de funções 38

3.4 Famílias indexadas de conjuntos e produtos cartesianos em geral 39

3.5 Exercícios 45

4 Cardinalidade, conjuntos infinitos, etc. **49**

4.1 Conjuntos de mesma cardinalidade 49

4.2 Conjuntos finitos/infinitos 52

4.3 Conjuntos enumeráveis/não-enumeráveis 54

4.4 Números cardinais 56

5 Números reais: racionais/irracionais, algébricos/transcendentes 61

5.1 Características fundamentais de $\mathbb{R}$ 61

5.2 Números reais e representações decimais 64

5.3 Números reais e cardinalidade 70

5.4 Números racionais/irracionais 72

5.5 Números algébricos/transcendentes 85

Referências 89

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 A noção de conjunto e alguns exemplos

Conjuntos

CONJUNTO é uma noção primitiva que associamos a qualquer coleção de objetos, os quais chamamos de ELEMENTOS DO CONJUNTO.

Exemplos:

Conjunto S dos símbolos $\triangle$, $\bigcirc$, $\bigstar$ e $\square$.

Conjunto A de todos os alunos matriculados na UFJF.

Conjunto $\mathbb{N}$ dos chamados números naturais $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

Dada uma reta r em um plano, r é o conjunto de todos os seus pontos.

Dados um elemento x (de algum conjunto X) e um conjunto Y arbitrários, a relação básica entre x e Y é a RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA. Se x é um dos elementos do conjunto Y então dizemos que x **pertence a** Y e escrevemos $x \in Y$. Se x não é um dos elementos do conjunto Y então dizemos que x **não pertence a** Y e escrevemos $x \notin Y$.

Exemplos: Considerando os exemplos anteriores, temos:

$\bigcirc \in S$, $\square \in S$, $\Diamond \notin S$.

Cristiano A. D. $\in A$, André A. H. $\notin A$.

$2 \in \mathbb{N}$, $\dfrac{7}{2} \notin \mathbb{N}$, $-5 \notin \mathbb{N}$.

$P \in r$, $Q \notin r$.

TODO CONJUNTO PRECISA ESTAR BEM DEFINIDO E ISTO OCORRE QUANDO, DADO UM ELEMENTO ARBITRÁRIO, FICA BEM DETERMINADO SE ESTE ELEMENTO PERTENCE OU NÃO AO CONJUNTO.

Conjuntos podem ser definidos de maneiras diferentes, mas sempre deve ser obedecido o princípio fundamental acima. Seguem algumas das diferentes maneiras de se definir conjuntos:

- REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA (ou POR EXTENSÃO): especificando-se, um a um, os elementos do conjunto.

$S = \{\triangle\,,\ \bigcirc\,,\ \bigstar\,,\ \square\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (conjunto dos números NATURAIS)

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (conjunto dos números INTEIROS)

$D = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 9999\}$ (conjunto dos números ímpares entre 1 e 9999)

- REPRESENTAÇÃO SINTÉTICA (ou POR COMPREENSÃO): através de uma propriedade comum e exclusiva de seus elementos. Um conjunto Y é definido por uma propriedade P da seguinte maneira: se x satisfaz a P então $x \in Y$ e se x não satisfaz a P então $x \notin Y$. Escreve-se $Y = \{\, x\ ;\ x \text{ satisfaz a propriedade } P\,\}$ e lê-se "conjunto dos elementos x tais que x satisfaz a propriedade P".

$A = \{\, x\ ;\ x \text{ é aluno matriculado na UFJF}\}$

$\mathbb{Q} = \{\, p/q\ ;\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\,\}$ (conjunto dos números RACIONAIS)

- IDENTIFICAÇÃO: com conjuntos já definidos.

Como exemplo, vamos definir o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais através de uma **identificação geométrica** (dos números reais) com os pontos de uma reta (a chamada RETA REAL).

Iniciamos com uma reta orientada (adotando um "sentido positivo") e escolhemos um ponto arbitrário que corresponderá ao número 0 (ZERO):

A partir do número (ponto) 0, escolhemos um ponto distinto do 0, no sentido positivo, que corresponderá ao número 1. A distância entre estes dois pontos é a **unidade de comprimento**:

A cada ponto desta reta está associado um único número e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é a coleção de todos os números associados a todos os pontos da reta (RETA REAL).

O ponto 0 "separa dois lados da Reta Real". Pontos (distintos do 0) do mesmo lado do 0 que o 1 são associados aos números reais positivos e pontos (distintos do 0) no lado do 0 que é oposto ao lado do 1 são associados aos números negativos.

Obs.: Podemos ainda definir as operações de ADIÇÃO e MULTIPLICAÇÃO de números reais através da Geometria (veja o exercício mais à frente). O conjunto dos números reais, com essas duas operações, satisfaz a uma série de propriedades (comutativa, associativa, elemento neutro, elemento inverso, distributiva) e por isso é considerado o que chamamos de CORPO.

É fácil ver que todo número RACIONAL (inteiro ou não, natural ou não) tem seu ponto correspondente na reta real:

Mais ainda, existem números reais (pontos na Reta Real) que não são racionais. São os chamados números IRRACIONAIS. Para ver isto, como exemplo, vamos exibir um número irracional na Reta Real.

Tomemos um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade de comprimento. Do Teorema de Pitágoras, temos que a medida da hipotenusa corresponde a um número positivo cujo quadrado é igual a 2 e que chamaremos portanto de $\sqrt{2}$.

Agora estamos portanto em condições de marcar na Reta Real o ponto correspondente ao número $\sqrt{2}$:

Finalmente, mostra-se (TENTE!) que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2, ou seja, o número $\sqrt{2}$ que acabamos de marcar na Reta Real é um número irracional.

Exercício: Dados os números reais a e b (na Reta Real abaixo), obtenha geometricamente (e marque na Reta Real) os números $a+b$, $a-b$, $b-a$, $1/a$, a/b , $a.b$ e $\sqrt{a}$.

- AXIOMÁTICA: um modo simples de se definir conjuntos pode ser obtido através do uso de **axiomas** que envolvam as características desejadas para esses conjuntos.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (com todas as suas características) pode ser definido de modo axiomático: "EXISTE UM CORPO ORDENADO COMPLETO $\mathbb{R}$" (Análise na Reta).

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado através dos AXIOMAS DE PEANO (veremos mais à frente no Curso).

O conjunto vazio ϕ também é usualmente definido de modo axiomático (adiante).

- CONSTRUÇÃO: a partir de conjuntos já definidos e através de ferramentas como álgebra dos conjuntos, relações de equivalência, etc.

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros pode ser construído a partir dos naturais.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais pode ser construído a partir dos inteiros (via relação de equivalência, que estudaremos no próximo capítulo).

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser construído a partir dos racionais (através das chamadas Sequências de Cauchy ou dos Cortes de Dedekind).

O conjunto vazio

Axioma: Existe um conjunto que não possui elemento algum.

Esse conjunto é chamado CONJUNTO VAZIO, denotado por ϕ e qualquer que seja x, tem-se $x \notin \phi$.

Exemplos: $\{ x \in \mathbb{R} \,;\, x^2 = -1 \} = \phi$, $\{ \ \} = \phi$, $\{ x \in \mathbb{N} \,;\, x + 7 = 0 \} = \phi$.

Obs.: O axioma acima utilizado para garantir a existência do conjunto vazio é conhecido como AXIOMA DE EXISTÊNCIA e faz parte de um conjunto de axiomas conhecidos como Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), os quais, juntamente com o chamado Axioma da Escolha ("Choice" , em inglês), constituem a base (ZFC) mais utilizada para o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos.

Conjuntos unitários

Chama-se CONJUNTO UNITÁRIO todo conjunto constituído de um único elemento.

Exemplos: $E = \{ \triangle \}$, $X = \{ x \in \mathbb{N} \; ; \; x^2 = 9 \} = \{ 3 \}$.

Conjunto universo

Chama-se CONJUNTO UNIVERSO de uma teoria o conjunto de todos os objetos que são considerados como elementos nessa teoria. Por exemplo: em Geometria Plana, o conjunto universo é o conjunto dos pontos de um plano.

O conjunto universo é também chamado o conjunto fundamental da teoria e é usualmente indicado pela letra U.

Ao definir certos conjuntos através de suas propriedades, deve estar bem claro (a priori) com qual conjunto universo estamos trabalhando. Por exemplo: Para que $A = \{ x \; ; \; x^2 = 2 \}$ esteja bem definido precisamos saber qual conjunto universo está sendo considerado, pois se $U = \mathbb{R}$ então $A = \{ x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 = 2 \} = \left\{ -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right\}$ enquanto que se $U = \mathbb{Q}$, então $A = \{ x \in \mathbb{Q} \; ; \; x^2 = 2 \} = \phi$.

1.2 Subconjuntos e a relação de inclusão

Subconjuntos

Dados conjuntos A e B, dizemos que A é SUBCONJUNTO de B quando todo elemento de A é também elemento de B, ou seja, $x \in A \Rightarrow x \in B$. Neste caso usamos a notação $A \subset B$ e dizemos que A **está contido em** B ou escrevemos $B \supset A$ e dizemos que B **contém** A.

A relação $A \subset B$ chama-se RELAÇÃO DE INCLUSÃO.

Exemplos:

Sejam A o conjunto dos quadrados e B o conjunto dos retângulos. Então $A \subset B$.

$\{ \triangle , \bigstar \} \subset \{ \triangle , \bigcirc , \bigstar , \square \}$.

$\mathbb{N}$ (naturais) $\subset$ $\mathbb{Z}$ (inteiros) $\subset$ $\mathbb{Q}$ (racionais) $\subset$ $\mathbb{R}$ (reais) .

A negação de $A \subset B$ indica-se pela notação $A \not\subset B$, que se lê "A não está contido em B" . Temos: $A \not\subset B$ se, e somente se, existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.

Temos então que $\phi \subset A$, qualquer que seja o conjunto A, pois caso contrário ($\phi \not\subset A$) deveria haver pelo menos um elemento do conjunto vazio ϕ que não pertenceria ao conjunto A, o que é claramente um ABSURDO (pois o conjunto ϕ não possui elemento algum).

Inclusão e igualdade de conjuntos

Dizemos que dois conjuntos A e B são IGUAIS (e escrevemos $A = B$) se, e somente se, possuem os mesmos elementos, ou seja, todo elemento de A pertence a B ($A \subset B$) **e** todo elemento de B pertence a A ($B \subset A$). Assim, temos:

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A$$

Quando se escreve $A \subset B$ não se exclui a possibilidade de se ter $A = B$. No caso em que $A \subset B$ e $A \neq B$ ($B \not\subset A$ necessariamente) dizemos que A é uma PARTE PRÓPRIA ou um SUBCONJUNTO PRÓPRIO de B (alguns autores usam a notação $A \subsetneq B$ para este caso).

Propriedades da inclusão

1) $\phi \subset A$ qualquer que seja o conjunto A ;

2) $A \subset A$ qualquer que seja o conjunto A ;

3) $A \subset B$ e $B \subset A \iff A = B$;

4) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Conjunto das partes de um conjunto

Dado um conjunto X, indica-se por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X. $\mathcal{P}(X)$ é chamado o CONJUNTO DAS PARTES de X.

Afirmar que $A \in \mathcal{P}(X)$ é o mesmo que dizer que $A \subset X$. $\mathcal{P}(X) = \{ A \, ; \, A \subset X \}$.

$\mathcal{P}(X)$ nunca é vazio, pois $\phi \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$ (propriedades 1 e 2 acima).

Exemplos:

Se $X = \{ \triangle, \bigstar, \square \}$, temos:

$\mathcal{P}(X) = \{ \phi \, , \{\triangle\} \, , \{\bigstar\} \, , \{\square\} \, , \{\triangle, \bigstar\} \, , \{\triangle, \square\} \, , \{\bigstar, \square\} \, , \{\triangle, \bigstar, \square\} = X \}$.

$\mathcal{P}(\phi) = \{ \phi \}$.

$\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, pois $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.3 Álgebra dos conjuntos

Obs.: Às vezes, é útil a **representação** de um conjunto por um recinto plano delimitado por uma linha fechada e não entrelaçada qualquer. Tal representação recebe o nome de DIAGRAMA DE VENN. Num Diagrama de Venn, os elementos do conjunto são representados por pontos internos ao recinto e elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos externos ao mesmo recinto. Por exemplo, sejam $A = \{\,2, 3\,\}$, $B = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$ e $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

Reunião ou união de conjuntos

A REUNIÃO de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto

$$A \cup B \;=\; \{\,x\;;\;x \in A \text{ ou } x \in B\,\}$$

Convém observar que a palavra **ou** empregada na propriedade que define $A \cup B$ não tem sentido exclusivo, ou seja, pode acontecer que um elemento $x \in A \cup B$ pertença simultaneamente aos conjuntos A e B.

Propriedades da reunião: (EXERCÍCIO)

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U. Temos:

1) $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$;

2) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$;

3) $A \subset C$ e $B \subset C \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) \subset C$;

4) $A \subset B \;\Rightarrow\; (A \cup C) \subset (B \cup C)$;

5) $A \cup A = A$ (idempotente);

6) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa);

7) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativa);

8) $A \cup \phi = A$ (ϕ é elemento neutro);

9) $A \cup U = U$ (U é elemento absorvente);

Interseção de conjuntos

A INTERSEÇÃO de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto

$$A \cap B = \{ x \,;\, x \in A \ \text{ e } \ x \in B \}$$

Se $A \cap B = \phi$ então dizemos que A e B são conjuntos DISJUNTOS.

Propriedades da interseção: (EXERCÍCIO)

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U. Temos:

1) $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$;

2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

3) $C \subset A$ e $C \subset B \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$;

4) $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$;

5) $A \cap A = A$ (idempotente);

6) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa);

7) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa);

8) $A \cap \phi = \phi$ (ϕ é elemento absorvente);

9) $A \cap U = A$ (U é elemento neutro);

10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva);

11) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva);

Diferença de conjuntos - Complementar

A DIFERENÇA entre os conjuntos A e B, **nessa ordem**, é o conjunto $A\backslash B$ formado pelos elementos de A que não pertencem a B:

$$A\backslash B \;=\; \{\, x\,;\; x \in A \;\text{ e }\; x \notin B \,\}$$

Obs.: Muitos autores usam a notação $A - B$ para a diferença entre A e B. Vamos evitar essa notação, pois ela pode causar confusão com OUTRO TIPO de diferença de conjuntos (muito presente quando trabalhamos com conjuntos numéricos ou espaços vetoriais), dada por $A - B = \{\, a - b\,;\; a \in A \text{ e } b \in B \,\}$.

Quando $B \subset A$, a diferença $A\backslash B$ chama-se COMPLEMENTAR de B em RELAÇÃO a A e escreve-se também: $A\backslash B = \complement_A B$.

Em relação ao conjunto universo U, a diferença $U\backslash X$ chama-se simplesmente COMPLEMENTAR de X e indica-se também por $\complement X$. Assim $x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X$.

Propriedades da diferença e do complementar: (EXERCÍCIO)

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U. Temos:

1) $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$;

2) $\complement\,\phi = U$ e $\complement U = \phi$;

3) $\complement(\complement A) = A$;

4) $A = \phi \;\Leftrightarrow\; \complement A = U$;

5) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; \complement B \subset \complement A$;

6) $A\backslash B = A \,\cap\, \complement B$;

7) $A \cap \complement A = \phi$ e $A \cup \complement A = U$;

8) $A \cap (B\backslash C) \;=\; (A \cap B)\backslash(A \cap C)$;

9) $\complement(A \cup B) \;=\; \complement A \,\cap\, \complement B$;

10) $\complement(A \cap B) \;=\; \complement A \,\cup\, \complement B$.

1.4 Exercícios

1. Sejam $A = \{ x \in \mathbb{Z} ; x$ é múltiplo de $2 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{Z} ; x$ é múltiplo de $3 \}$,
$C = \{ x \in \mathbb{Z} ; -3 \leq x < 5 \}$ e $D = \{ x \in \mathbb{Z} ; x < 1 \}$.
Obtenha $A \cap B$, $C \backslash D$, $D \backslash C$, $\complement D$, $C \cup D$ e $C \cap D$.

2. Seja $A = \{ \{ \phi \} , \phi \}$. Verifique quais das seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas:
(a) $\{ \{ \phi \} \} \in A$ (b) $\phi \in A$ (c) $\{ \phi \} \in A$
(d) $\{ \{ \phi \} \} \subset A$ (e) $\phi \subset A$ (f) $\{ \phi \} \subset A$

3. Mostre que
(a) Os conjuntos $A \cap B$ e $A \backslash B$ são disjuntos.
(b) $A \cup (A \cap B) = A$
(c) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$
(d) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
(e) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

4. Sejam A , B e C conjuntos quaisquer num universo U. Demonstre as afirmativas verdadeiras e dê contra-exemplos para as falsas:
(a) $A \backslash B = B \backslash A$
(b) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$
(c) $A \backslash (B \backslash A) = A$
(d) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$
(e) $A \backslash (B \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$
(f) $\complement (A \backslash B) = \complement A \cap B$
(g) $(A \backslash C) \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$
(h) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$
(i) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$
(j) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (A \cup C)$

5. Seja $E = \{ \triangle \}$. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

6. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))$.

7. Prove que $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

8. Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:
(i) $X \supset A$ e $X \supset B$
(ii) Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$
Prove que $X = A \cup B$

9. Sejam $A , B \subset U$ (universo). Prove que:
(a) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset \complement B$
(b) $A \cup B = U \Leftrightarrow \complement A \subset B$
(c) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \complement B = \phi$

10. Mostre que $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$ e exiba um contra-exemplo para mostrar que não vale a inclusão no outro sentido.

11. Se $A\,, X \subset U$ (universo) são tais que $A \cap X = \phi$ e $A \cup X = U$, então $X = \complement A$.

12. Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = \phi$

13. Chama-se DIFERENÇA SIMÉTRICA dos conjuntos A e B e indica-se por $A\Delta B$ ao conjunto de todos os elementos que pertencem a um e somente um dos conjuntos A ou B, ou seja, $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Mostre que:

(a) $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ (b) $A\Delta\,\phi = A$ (c) $A\Delta U = \complement A$
(d) $A\Delta\complement A = U$ (e) $A\Delta A = \phi$ (f) $A\Delta B = B\Delta A$
(g) $\complement(A\Delta B) = (A \cap B) \cup (\complement A \cap \complement B)$

14. Dados $A = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,\}$, $B = \{\, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \,\}$ e $C = \{3, 6, 9, 12 \,\}$, obtenha $A\Delta B$, $A\Delta C$, $B\Delta C$, $A\Delta(B\Delta C)$, $(A \cup B)\Delta(A \cup C)$ e $(A \cap B)\Delta C$.

15. Mostre que:
(a) Se $A \subset B$ então $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C .
(b) Se existir um conjunto C tal que $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$, então $A \subset B$.

16. Sejam A um conjunto com m elementos, B um conjunto com n elementos e suponha que $A \cap B$ tenha p elementos. quantos elementos têm $A \cup B$, $A\backslash B$ e $B\backslash A$?

17. Os sócios dos clubes A e B perfazem o total de 140. Qual é o número de sócios de A, se B tem 60 sócios e há 40 que pertencem aos dois clubes ?

18. Numa classe de 200 estudantes, 80 estudam Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física, 23 Química e Física, 16 Biologia e Química e 8 estudam as três matérias. A relação de matrículas está correta ?

19. Numa cidade há 1000 famílias: 470 assinam O Globo, 420 assinam o Jornal do Brasil, 315 assinam o Estado de Minas, 140 assinam O Estado de Minas e o Jornal do Brasil, 220 assinam O Estado de Minas e O Globo, 110 assinam o Jornal do Brasil e O Globo e 75 assinam os três jornais. Pergunta-se:
(a) Quantas famílias não assinam jornal algum ?
(b) Quantas famílias assinam exatamente um dos jornais ?
(c) Quantas famílias assinam exatamente dois jornais ?

Capítulo 2

Relações

2.1 Relações Binárias

Pares ordenados, produtos cartesianos e relações

Definição 2.1. *(Par ordenado) Dados dois elementos a e b, chama-se PAR ORDENADO um terceiro elemento que se indica por* (a, b) *.*

O elemento a chama-se **o primeiro elemento** *(ou a primeira coordenada) do par ordenado* (a, b) *e o elemento b chama-se* **o segundo elemento** *(ou a segunda coordenada) do par ordenado* (a, b) *.*

Dois pares ordenados (a, b) *e* (c, d) *são iguais se, e somente se,* $a = c$ *e* $b = d$ *.*

Obs.: Não se deve confundir o par ordenado (a, b) com o conjunto $\{a, b\}$. De fato, como dois conjuntos que possuem os mesmos elemento são iguais, temos $\{a, b\} = \{b, a\}$ sejam quais forem a e b. Por outro lado, se $a \neq b$ temos $(a, b) \neq (b, a)$.

Definição 2.2. *(Produto cartesiano) Dados dois conjuntos A e B, chama-se PRODUTO CARTESIANO de A por B e denota-se por* $A \times B$ *ao conjunto formado por todos os pares ordenados* (a, b) *cujo primeiro elemento pertence a A* **e** *cujo segundo elemento pertence a B:*

$$A \times B \;=\; \{\; (a, b)\; ;\; a \in A \;\; e \;\; b \in B \;\}$$

Exemplos:

(a) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\triangle, \bigstar\}$, temos:

$$A \times B \;=\; \{\; (1, \triangle)\, , (1, \bigstar)\, , (2, \triangle)\, , (2, \bigstar)\, , (3, \triangle)\, , (3, \bigstar)\; \}\ .$$

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\; (x, y)\; ;\; x, y \in \mathbb{R}\; \} \;=\; \mathbb{R}^2$. Por exemplo: $(\sqrt{3}, -7)\, , (8, \pi)\, , (0, 0) \;\in \mathbb{R}^2$.

Obs.: (i) Note que, em geral, temos $A \times B \neq B \times A$.
(ii) $A \times B = \phi$ se, e somente se, ($\Leftrightarrow$) $A = \phi$ ou $B = \phi$.

Algumas propriedades: (EXERCÍCIO)

1) $$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} A \times (B \backslash C) &= (A \times B) \backslash (A \times C) \\ (A \backslash B) \times C &= (A \times C) \backslash (B \times C) \end{aligned}$$

Definição 2.3. *(Relações binárias) Dados dois conjuntos A e B, chama-se RELAÇÃO BINÁRIA ou simplesmente RELAÇÃO de A em B a todo subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$:*

$$R \text{ é relação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A \times B \; .$$

Os conjuntos A e B são denominados, respectivamente, **conjunto de partida** *e* **conjunto de chegada** *da relação R.*

Para indicar que $(a, b) \in R$, escrevemos $a \, R \, b$ e lemos "a erre b" ou "a relaciona-se com b segundo R". Se $(a, b) \notin R$ escrevemos $a \not R \, b$ e lemos "a não erre b" ou "a não se relaciona com b segundo R". $a \not R \, b$.

Exemplos:

(a) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\triangle, \bigstar\}$, temos:

$$A \times B \;=\; \{\; (1, \triangle) \, , \, (1, \bigstar) \, , \, (2, \triangle) \, , \, (2, \bigstar) \, , \, (3, \triangle) \, , \, (3, \bigstar) \; \} \; .$$

$R_1 = \phi$, $R_2 = \{ \; (2, \bigstar) \; \}$, $R_3 = \{ \; (1, \triangle) \, , \, (2, \triangle) \, , \, (1, \bigstar) \; \}$ são relações de A em B.

(b) $R = \{ \; (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; ; \; p.q = 0 \; \}$ é uma relação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

(c) $S = \{ \; (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; ; \; p - q$ é múltiplo (inteiro) de 3 $\}$ é uma relação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

(d) Consideremos $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$R_1 = \left\{ \; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y \geq 0 \; \right\}$ é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$R_2 = \left\{ \; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y = 2x \; \right\}$ é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$R_3 = \left\{ \; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \leq y \; \right\}$ é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

(e) Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X, ou seja, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$.

A INCLUSÃO de conjuntos representa uma relação $R_{\subset}$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$:

$$R_{\subset} \;=\; \{\; (A,B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \;;\; A \subset B \;\} \;,$$

ou seja, dados $A,\, B \in \mathcal{C}$, temos: $A\, R_{\subset}\, B \;\;\Leftrightarrow\;\; A \subset B$.

(f) Seja $\mathcal{R}$ a coleção de todas as retas de um plano α . Dadas duas retas $r, s \in \mathcal{R}$, diremos que r e s são PARALELAS e escreveremos $r \,/\!/ s$ quando r e s são coincidentes $(r = s)$ ou $r \cap s = \phi$. Definimos então a relação de paralelismo, de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$:

$$R_{/\!/} \;=\; \{\; (r,s) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \;;\; r \,/\!/ s \;\} \;.$$

Obs.: Se $A = \phi$ ou $B = \phi$ então $A \times B = \phi$ e só existirá uma relação de A em B, a saber $R = \phi$. Por este motivo, de agora em diante, **consideraremos sempre A e B não-vazios**.

Domínio e Imagem de uma relação

Seja R uma relação de A em B.

Chama-se o DOMÍNIO de R e denota-se por $\mathrm{D}\,(R)$ o subconjunto de A formado pelos elementos x para os quais existe algum y em B tal que $xR\,y$:

$$\mathrm{D}\,(R) = \{\; x \in A \;;\; \exists\, y \in B \;\text{ com }\; xR\,y \;\} = \{\; x \in A \;;\; \exists\, y \in B \;\text{ com }\; (x,y) \in R \;\} \;.$$

Chama-se o IMAGEM de R e denota-se por $\mathrm{Im}\,(R)$ o subconjunto de B formado pelos elementos y para os quais existe algum x em A tal que $xR\,y$:

$$\mathrm{Im}\,(R) = \{\; y \in B \;;\; \exists\, x \in A \;\text{ com }\; xR\,y \;\} = \{\; y \in B \;;\; \exists\, x \in A \;\text{ com }\; (x,y) \in R \;\} \;.$$

Em outros termos, $\mathrm{D}\,(R)$ é o subconjunto de A formado pelos primeiros termos dos pares ordenados que constituem R e $\mathrm{Im}\,(R)$ é o subconjunto de B formado pelos segundos termos dos pares ordenados de R.

Exemplos:

(a) Sejam $R_2 = \{\; (2, \bigstar) \;\}$ e $R_3 = \{\; (1, \triangle)\, , (2, \triangle)\, , (1, \bigstar) \;\}$ relações de $A = \{1,2,3\}$ em $B = \{\triangle, \bigstar\}$. Temos: $\mathrm{D}\,(R_2) = \{2\}$, $\mathrm{Im}\,(R_2) = \{\bigstar\}$, $\mathrm{D}\,(R_3) = \{1,2\}$ e $\mathrm{Im}\,(R_3) = B$.

(b) Se $R_1 = \left\{\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; y \geq 0 \;\right\}$, então $\mathrm{D}\,(R_1) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}\,(R_1) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (conjunto dos números reais não-negativos).

Representação de uma relação

Gráfico Cartesiano: Quando os conjuntos de partida A e de chegada B de uma relação $R \subset A \times B$ são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$, temos $R \subset A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Nesse caso, o GRÁFICO da relação R é o conjunto dos pontos do plano cujas abscissas são os primeiros termos e as ordenadas são os segundos termos dos pares ordenados que constituem a relação:

Exemplos:

(a) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \, ; \; x^2 + y^2 \leq 3 \}$

(b) $R_1 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \; y \geq 0 \Big\}$

Esquema de flechas: Em certas situações, sobretudo quando A e B são conjuntos finitos com "poucos" elementos, é comum representarmos uma relação R de A em B representando A e B po meio de Diagramas de Venn e indicando cada par ordenado $(x, y) \in R$ por uma flecha com origem x e extremidade y:

Exemplo: $R_3 = \{ (1, \triangle) \, , \, (2, \triangle) \, , \, (1, \bigstar) \} \subset A \times B$, com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\triangle, \bigstar\}$:

Relação inversa

Seja R uma relação de A em B. Chama-se RELAÇÃO INVERSA de R, e denota-se por R^{-1}, a seguinte relação de B em A:

$$R^{-1} = \{\ (y,x) \in B \times A\ ;\ (x,y) \in R\ \}\ .$$

Exemplos:

(a) $R_3 = \{\ (1,\triangle)\ ,\ (2,\triangle)\ ,\ (1,\bigstar)\ \}\ \subset\ A \times B$, com $A = \ \{1,2,3\}$ e $B = \{\triangle, \bigstar\}$

$$R_3^{-1} = \{\ (\triangle,1)\ ,\ (\triangle,2)\ ,\ (\bigstar,1)\ \}$$

(b) $R_1 = \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y \geq 0\ \Big\}\ \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$$R_1^{-1} = \Big\{(y,x) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y \geq 0\ \Big\}\ =\ \Big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0\ \Big\}$$

Obs.: Note que $\mathrm{D}\,(R^{-1}) = \mathrm{Im}\,(R)$, $\mathrm{Im}\,(R^{-1}) = \mathrm{D}\,(R)$ e $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

Propriedades das relações num conjunto A

Uma relação R sobre A, ou seja, de A em A, pode apresentar ou não as seguintes propriedades fundamentais:

- **Reflexiva:** $xR\,x$, para todo ($\forall$) $x \in A$.

Exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(a,a),(b,b),(a,c),(c,c)\}$ é reflexiva.
Contra-exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(a,a),(b,b),(b,a)\}$ não é reflexiva.

- **Simétrica:** $xR\,y\ \Rightarrow\ yR\,x$, para todos $x,y \in A$.

Exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$ é simétrica.
Contra-exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(b,b),(c,a)\}$ não é simétrica.

- **Anti-simétrica:** $xR\,y$ e $yR\,x\ \Rightarrow\ x = y$, para todos $x,y \in A$.

Exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(a,a),(b,b),(a,c),(a,b)\}$ é anti-simétrica.
Contra-exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$ não é anti-simétrica.

- **Transitiva:** $xR\,y$ e $yR\,z\ \Rightarrow\ xR\,z$, para todos $x,y,z \in A$.

Exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$ é transitiva.
Contra-exemplo: $A = \{a,b,c\}$; $R = \{(b,b),(a,b),(b,c)\}$ não é transitiva.

Exercício: Para cada uma das relações (de um conjunto nele mesmo) vistas nos exemplos até agora, verifique quais das propriedades acima essas relações possuem ou não.

2.2 Relações de equivalência

Definição e exemplos

Definição 2.4. *Uma relação R sobre um conjunto não-vazio A é dita uma RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA sobre A quando R é* **reflexiva**, **simétrica** *e* **transitiva**, *ou seja, quando R possui as seguintes propriedades:*

(i) xRx , *para todo* $x \in A$ *(reflexiva)*

(ii) $xRy \Rightarrow yRx$, *para todos* $x, y \in A$ *(simétrica)*

(iii) xRy *e* $yRz \Rightarrow xRz$, *para todos* $x, y, z \in A$ *(transitiva)*

Notação: Quando R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A costumamos representar $(x, y) \in R$ (ou xRy) por

$$x \equiv y \pmod{R} \quad \text{ou} \quad x \equiv y \ (R) \quad \text{ou} \quad x \sim y \pmod{R} \quad \text{ou} \quad x \sim y \ (R)$$

que se lê: "x é equivalente a y módulo R" ou "x é equivalente a y segundo R" .

A negação é análoga: $x \not{R} y \Leftrightarrow x \not\equiv y \pmod{R}$.

Exemplos:

(a) $R = \{ (a, a), (b, b), (a, c), (c, a), (c, c) \}$ é relação de equivalência sobre $A = \{a, b, c\}$.

(b) A relação I de igualdade sobre $\mathbb{R}$, dada por $I = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = y \right\}$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{R}$.

Exercício: Para cada uma das relações (de um conjunto nele mesmo) vistas nos exemplos até agora, verifique (JUSTIFICANDO) quais são relações de equivalência.

Classes de equivalência e Conjunto Quociente

Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A.

Dado $a \in A$, chama-se CLASSE DE EQUIVALÊNCIA determinada por a módulo R (ou segundo R) e indica-se por $\bar{a}$ o subconjunto de A formado por todos os elementos de A que se relacionam com a segundo a relação R:

$$\bar{a} = \{ x \in A \ ; \ xRa \} = \{ x \in A \ ; \ x \sim a \pmod{R} \} \subset A \ .$$

O conjunto de todas as classes de equivalência segundo R será indicado por A/R e chamado o CONJUNTO QUOCIENTE de A por R:

$$A/R \;=\; \{\ \bar{a}\ ;\ a \in A\ \} \subset \mathcal{P}(A)\ .$$

Exemplos:

(a) Na relação de equivalência $R = \{\ (a,a),(b,b),(a,c),(c,a),(c,c)\ \}$ sobre $A = \{a,b,c\}$ temos: $\bar{a} = \{a,c\}$, $\bar{b} = \{b\}$, $\bar{c} = \{a,c\}$ e $A/R = \{\ \{a,c\}\ , \{b\}\ \}$.

(b) Se $I = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x = y\ \right\}$, então $\bar{a} = \{\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x = a\ \} = \{a\}$.
Logo $\mathbb{R}/I = \{\ \{a\}\ ;\ a \in \mathbb{R}\ \}$.

(c) Seja $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ o conjunto das retas na figura abaixo:

Se R é a relação de paralelismo sobre o conjunto A, então $A/R = \{\ \{a,b,e\}\ ,\ \{c,d\}\ ,\ \{f\}\ \}$.

Teorema 2.5. *Sejam R uma relação de equivalência sobre um conjunto A e $a, b \in A$. As seguintes proposições são equivalentes:*

(1) $a R\, b$ *(2)* $a \in \bar{b}$ *(3)* $b \in \bar{a}$ *(4)* $\bar{a} = \bar{b}$.

Obs.: O elemento $a \in \bar{a}$ é chamado um REPRESENTANTE DA CLASSE $\bar{a}$.

Segue do Teorema acima que qualquer elemento de uma classe de equivalência é um representante dessa classe (MOSTRE).

Partição de um conjunto:

Seja A um conjunto não-vazio. Dizemos que um conjunto P de subconjuntos não-vazios de A é uma PARTIÇÃO de A quando:

(i) dois elementos de P ou são iguais ou são disjuntos E

(ii) a união dos elementos de P é igual a A.

Exemplos:

(a) $P = \{\ \{1\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{4\}\ \}$ é uma partição do conjunto $A = \{1,2,3,4\}$.

(b) Se $X = \{\ x \in \mathbb{Z}\ ;\ x$ é PAR $\}$ e $Y = \{\ x \in \mathbb{Z}\ ;\ x$ é IMPAR $\}$ então $P = \{X, Y\}$ é partição de $\mathbb{Z}$.

Os teoremas seguintes mostram que toda relação de equivalência sobre um conjunto A determina uma partição de A e, reciprocamente, toda partição de A provém de alguma relação de equivalência sobre A.

Teorema 2.6. *Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto não-vazio A então A/R é uma partição de A.*

Demonstração:

Teorema 2.7. *Se P é uma partição de um conjunto não-vazio A, então existe uma relação de equivalência R sobre A de modo que $P = A/R$.*

Demonstração:

2.3 Relações de ordem

Definições e exemplos

Definição 2.8. *(Ordem parcial) Uma relação R sobre um conjunto não-vazio A é chamada RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL ou simplesmente relação de ordem quando R é* **reflexiva**, **anti-simétrica** *e* **transitiva**, *ou seja, quando R possui as seguintes propriedades:*

(i) xRx , *para todo* $x \in A$ *(reflexiva)*

(ii) xRy *e* $yRx \Rightarrow x = y$, *para todos* $x, y \in A$ *(anti-simétrica)*

(iii) xRy *e* $yRz \Rightarrow xRz$, *para todos* $x, y, z \in A$ *(transitiva)*

Quando R é uma relação de ordem parcial sobre A dizemos que A é um conjunto parcialmente ordenado pela ordem R e, para exprimirmos que $(a, b) \in R$ usamos a notação $a \leq b\,(R)$ e lemos "a precede b na relação R".

Uma relação de **ordem parcial** *R sobre um conjunto A é dita uma RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL quando, dados dois elementos quaisquer de A, eles são comparáveis mediante R, ou seja,* $a \leq b\,(R)$ *ou* $b \leq a\,(R)$ *para todos* $a, b \in A$ *. Neste caso, dizemos que A é um conjunto totalmente ordenado pela ordem R.*

Exemplos:

(a) A relação de DIVISIBILIDADE D sobre $\mathbb{N}$, dada por $x\,D\,y \Leftrightarrow x \mid y$ (x divide y) é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{N}$. D **não é ordem total** pois, por exemplo, 4 e 7 não são comparáveis mediante D.

(b) $R = \{\ (a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(a,c),(b,c)\ \}$ é ordem total sobre $A = \{a,b,c\}$.

Exercício: Para cada uma das relações (de um conjunto nele mesmo) vistas nos exemplos até agora, verifique (JUSTIFICANDO) quais são relações de ordem parcial ou ordem total.

Definição 2.9. *(Ordem estrita) Uma relação R sobre um conjunto não-vazio A é chamada RELAÇÃO DE ORDEM ESTRITA quando R possui as seguintes propriedades:*

(i) $x \not R\, x$ *, para todo* $x \in A$ *(irreflexiva)*

(ii) xRy *e* $yRz \Rightarrow xRz$ *, para todos* $x, y, z \in A$ *(transitiva)*

Quando R é uma relação de ordem estrita sobre A dizemos que A é um conjunto estritamente ordenado pela ordem R.

Uma relação de **ordem estrita** *R sobre um conjunto A é dita uma RELAÇÃO DE ORDEM ESTRITA TOTAL quando, dados dois elementos quaisquer de A, eles são comparáveis mediante R, ou seja, ou* $a\,R\,b$ *ou* $b\,R\,a$ *para todos* $a \neq b$ *em A . Neste caso, dizemos que A é um conjunto estrita e totalmente ordenado pela ordem R.*

Exemplos:

(a) A relação L sobre $\mathbb{R}$, dada por $x\,L\,y \Leftrightarrow x < y$ é uma relação de ordem estrita total sobre $\mathbb{R}$.

(b) $R = \{\ (a,b),(a,c)\ \}$ é ordem estrita (não total) sobre $A = \{a,b,c\}$.

Exercício: Prove que se R é uma relação de ordem estrita sobre um conjunto A então ela possui a seguinte propriedade:

$$x\,R\,y \;\Rightarrow\; y \not R\, x\ ,\ \text{para todos}\ x, y \in A\ \text{(assimétrica)}\ .$$

Elementos notáveis de um conjunto ordenado

Seja A um subconjunto não-vazio do conjunto E parcialmente ordenado pela relação "$\leq$" .

(a) **Cotas (ou limites) superiores/inferiores de** A: Um elemento $L \in E$ é uma COTA SUPERIOR de A quando $x \leq L$ para todo $x \in A$, ou seja, qualquer elemento de A precede L na relação de ordem.

Um elemento $l \in E$ é uma COTA INFERIOR de A quando $l \leq x$ para todo $x \in A$, ou seja, l precede qualquer elemento de A na relação de ordem.

(b) **Máximo/Mínimo de** A: Um elemento $M \in A$ é um ELEMENTO MÁXIMO de A quando $x \leq M$ para todo $x \in A$, ou seja, M é cota superior de A e pertence a A.

Um elemento $m \in A$ é um ELEMENTO MÍNIMO de A quando $m \leq x$ para todo $x \in A$, ou seja, m é cota inferior de A e pertence a A.

(c) **Supremo/Ínfimo de** A: Chama-se SUPREMO de A o mínimo (caso exista) do conjunto das cotas superiores de A.

Chama-se ÍNFIMO de A o máximo (caso exista) do conjunto das cotas inferiores de A.

(d) **Elementos maximais/minimais de** A: Um elemento $m_a \in A$ é um ELEMENTO MAXIMAL de A quando o único elemento de A precedido por m_a é ele próprio, ou seja, se $x \in A$ é tal que $m_a \leq x$ então $x = m_a$.

Um elemento $m_i \in A$ é um ELEMENTO MNIMAL de A quando o único elemento de A que precede m_i é ele próprio, ou seja, se $x \in A$ é tal que $x \leq m_i$ então $x = m_i$.

Exemplos:

(a) $E = \mathbb{R}$, $A = (0, 1]$ e $R_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \leq y \right\}$.
Cotas superiores de A: $\{ L \in \mathbb{R} \; ; \; L \geq 1 \}$. Cotas inferiores de A: $\{ l \in \mathbb{R} \; ; \; l \leq 0 \}$.
Máximo de A: 1 . Mínimo de A: não existe.
Supremo de A: 1 . Ínfimo de A: 0 .
Elemento maximal: 1 . Elemento minimal: não existe.

(b) $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ e a ordem é a DIVISIBILIDADE, ou seja, $x \, R \, y \Leftrightarrow x \mid y$.
Cotas superiores de A: $12, 36$. Cotas inferiores de A: $1, 2$.
Máximo de A: não existe. Mínimo de A: 2 .
Supremo de A: 12 . Ínfimo de A: 2 .
Elementos maximais: $4, 6$. Elemento minimal: 2 .

O Princípio da Boa-Ordenação e o Lema de Zorn

Seja E um conjunto ordenado pela relação de ordem parcial "$\leq$". Dizemos que E é BEM ORDENADO por "$\leq$" (ou que "$\leq$" é uma boa ordem sobre E) quando todo subconjunto não-vazio de E possui elemento mínimo.

Exemplos:

(a) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é bem-ordenado pela relação "menor ou igual" $R = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ ; \ x \leq y \}$.

Prova-se isto usando um dos Axiomas de Peano, que caracterizam os naturais e os quais veremos mais à frente no curso.

(b) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais **não é** bem ordenado pela relação "menor ou igual" $R = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ ; \ x \leq y \}$ pois, por exemplo, $A = (0,1]$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e não possui elemento mínimo.

Exercício: Prove que todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado e apresente um contra-exemplo para mostrar que nem todo conjunto totalmente ordenado é bem ordenado.

- **Princípio da Boa-Ordenação** (Zermelo): Todo conjunto **pode ser** bem ordenado (ou seja, dado qualquer conjunto E, EXISTE uma boa ordem sobre E).

O Princípio da Boa-Ordenação é EQUIVALENTE a dois outros importantes axiomas, o **Axioma da Escolha** (que envolve o conceito de função, o qual veremos no próximo capítulo) e o **Lema de Zorn**, o qual enunciaremos a seguir:

Seja "$\leq$" uma relação de ordem parcial sobre um conjunto não-vazio X. Dizemos que X é Z-INDUTIVO (Zorn-indutivo) quando, para todo subconjunto $Y \subset X$, Y **totalmente ordenado por "$\leq$"**, tem-se que Y possui cota superior (existe $a \in X$ tal que $y \leq a$ para todo $y \in Y$).

- **Lema de Zorn**: Todo conjunto ordenado e Z-indutivo admite elemento maximal.

O Lema de Zorn é uma "ferramenta de indução" com a qual provamos a existência de certos elementos maximais que se mostram como objetos de destaque em várias áreas da Matemática. Como exemplos, podemos citar que se utiliza o Lema de Zorn para provar a existência de bases algébricas em espaços vetoriais (Álgebra Linear), bases geométricas em espaços com produto interno (Álgebra Linear), para se provar o importante Teorema de Hahn-Banach (Análise Funcional), etc.

2.4 Exercícios

1. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo U. Demonstre as afirmativas verdadeiras e dê contra-exemplos para as falsas:
(a) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$
(b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
(c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$
(d) Para $C \neq \phi$, $A \subset B \Leftrightarrow A \times C \subset B \times C$

2. Sejam $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5, 9\}$. Enumere os elementos e responda qual o domínio, a imagem e a inversa de cada uma das seguintes relações de A em B:
(a) $R_1 = \{ (x, y) \in A \times B \ ; \ y = x + 1 \}$
(b) $R_2 = \{ (x, y) \in A \times B \ ; \ x \leq y \}$

3. Seja $R = \{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$ relação sobre $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Obtenha o domínio e a imagem de R, os elementos, o domínio e a imagem de R^{-1} e os gráficos de R e R^{-1}.

4. Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Definimos então a RELAÇÃO COMPOSTA de S e R:

$$S \circ R = \{ (x, z) \in A \times C \ ; \ \exists \, y \in B \ \text{ com } (x, y) \in R \ \text{ e } (y, z) \in S \} \ .$$

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\triangle, \bigstar, \square\}$, $C = \{3, 4, 6\}$, $R = \{ (1, \bigstar), (2, \bigstar), (3, \square) \} \subset A \times B$ e $S = \{ (\triangle, 3), (\bigstar, 3), (\bigstar, 4), (\square, 6) \} \subset B \times C$.

Obtenha as relações $S \circ R$, $(S \circ R)^{-1}$, R^{-1} , S^{-1} e $R^{-1} \circ S^{-1}$.

5. Um casal tem 5 filhos: Álvaro (a), Bruno (b), Cláudio (c), Dario (d) e Elizabete (e). Enumerar os elementos da relação R definida no conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$ por $x \, R \, y \Leftrightarrow x$ é irmão de y . Que propriedades R apresenta ? Obs.: x é irmão de y quando x é homem, $x \neq y$ e x e y têm os mesmos pais.

6. Pode uma relação sobre um conjunto não-vazio A ser simétrica e anti-simétrica ? Pode uma relação sobre A não ser simétrica nem anti-simétrica ? Justifique.

7. Provar que se uma relação R sobre um conjunto A é transitiva, então R^{-1} também o é.

8. Sejam R e S relações sobre um mesmo conjunto A. Provar que:
(a) $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$
(b) $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$
(c) $R \cup R^{-1}$ é simétrica.
(d) Se R e S são transitivas então $R \cap S$ é transitiva. E $R \cup S$?
(e) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ e $R \cup S$ são simétricas.

9. Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Mostrar que:
(a) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
(b) Se R é reflexiva sobre A então $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$ são reflexivas.
(c) Se R é uma relação sobre A então $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$ são simétricas.
(d) Se R e S são simétricas sobre A, então: $S \circ R$ é simétrica $\Leftrightarrow$ $S \circ R = R \circ S$.

10. Mostrar que a relação R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(a,b)\,R\,(c,d) \;\Leftrightarrow\; a+b=c+d$ é uma relação de equivalência.

11. Prove que as seguintes sentenças não definem relações de equivalência em $\mathbb{N}$.
(a) $x\,R_1\,y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mdc}(x,y)=1$
(b) $x\,R_2\,y \;\Leftrightarrow\; x \leq y$
(c) $x\,R_3\,y \;\Leftrightarrow\; x+y=10$

12. Para cada uma das relações dadas abaixo, faça:

• Responda se ela possui ou não cada uma das propriedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva.
• Identifique (justificando) se ela é ou não é uma relação de equivalência, relação de ordem (parcial ou estrita, total ou não).
• Para as relações de equivalência, identifique as classes de equivalência e o conjunto quociente.
• Para as relações de ordem destaque: o supremo (que não seja máximo) de algum subconjunto (diga qual); máximo/mínimo, elementos maximais/minimais do conjunto ordenado pela relação.

(a) R_1 é a relação sobre o conjunto $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ dada por
$R_1 = \{\ (a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(b,c),(d,d),(c,e),(d,e),(a,e),(b,e),(e,e),(f,f),(d,f)\ \}$

(b) $\mathcal{C}$ é a coleção de todas as retas de um plano α e $R_2 = \{\ (r,s) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}\ ;\ r \cap s \neq \phi\ \}$

(c) $R_3 = \{\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ ;\ p-q$ é múltiplo (inteiro) de $3\ \}$

(d) $R_4 = \{\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ ;\ p$ divide q (ou seja, $q=k.p$, $k \in \mathbb{Z}$) $\}$

13. Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto não-vazio A. Conclua que $\bar{a} \neq \phi$ para todo $a \in A$.

14. (Congruências) Seja $m \in \mathbb{N}$. Dados $x,y \in \mathbb{Z}$, dizemos que x é CONGRUENTE a y MÓDULO m quando $x-y$ é múltiplo de m, ou seja, quando existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x-y=k.m$.
Notação: $x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$.
Prove que a congruência módulo m sobre $\mathbb{Z}$, $\equiv (\mathrm{mod}\, m)$, é uma relação de equivalência.

15. O conjunto $\mathbb{Z}/\equiv (\mathrm{mod}\, m)$, quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de equivalência $\equiv (\mathrm{mod}\, m)$ é denotado por $\mathbb{Z}_m$ e chamado CONJUNTO DAS CLASSES DE RESTOS MÓDULO m.

Obtenha $\mathbb{Z}_5$ e descreva cada uma de suas classes.

16. Mostre que a relação R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(a, b)\, R\, (c, d) \;\Leftrightarrow\; a + d = b + c$ é uma relação de equivalência. Descreva suas classes de equivalência e identifique cada uma delas com um número INTEIRO.

Dessa forma, o quociente $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/R$ é naturalmente associado ao conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Essa é uma forma de se construir o conjunto $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$!!!

17. Mostre que a relação S sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dada por $(a, b)\, S\, (c, d) \;\Leftrightarrow\; a.d = b.c$ é uma relação de equivalência. Descreva suas classes de equivalência e identifique cada uma delas com um número RACIONAL.

Dessa forma, o quociente $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/S$ é naturalmente associado ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Essa é uma forma de se construir o conjunto $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$!!!

18. Dizer se cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$ é ou não é totalmente ordenado pela relação de divisibilidade:

(a) $\{24, 2, 6\}$ (b) $\{3, 15, 5\}$ (c) $\{15, 5, 30\}$ (d) $\mathbb{N}$

19. Seja R a relação sobre $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $(a, b)\, R\, (c, d) \;\Leftrightarrow\; a \leq c$ e $b \leq d$.
Mostre que R é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{R}^2$.

20. Seja $E = \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ordenado pela ordem de DIVISIBILIDADE. Determinar os elementos notáveis de $A = \{6, 10\}$.

21. Seja $E = \{\, \{a\}\, ,\, \{b\}\, ,\, \{a, b, c\}\, ,\, \{a, b, d\}\, ,\, \{a, b, c, d\}\, ,\, \{a, b, c, d, e\}\, \}$ ordenado pela ordem de INCLUSÃO. Determinar os elementos notáveis de $A = \{\, \{a, b, c\}\, ,\, \{a, b, d\}\, ,\, \{a, b, c, d\}\, \}$.

22. Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ define-se a seguinte relação de ordem parcial: $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \mid c$ e $b \leq d$.
Determine os elementos notáveis de $A = \{\, (2, 1)\, ,\, (1, 2)\, \}$.

23. Seja R a relação sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $(a, b)\, R\, (c, d) \;\Leftrightarrow\; a < c$ ou $a = c$ e $b \leq d$.
Mostre que R é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{R}^2$ (denominada ORDEM LEXICOGRÁFICA).

24. Seja R a relação sobre $\mathbb{Q}$ dada por $x\, R\, y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}$.
Provar que R é uma relação de equivalência e descrever a classe $\bar{1}$.

25. $A = \{\, x \in \mathbb{Q}\, ;\; 0 \leq x^2 \leq 2\, \} \subset \mathbb{Q}$, onde está definida a relação habitual de ordem $\leq$.
Determinar os elementos notáveis de A.

26. Provar que se R é uma relação de equivalência sobre A, então R^{-1} também o é.

27. Provar que se R é uma relação de ordem sobre A, então R^{-1} também o é (chamada ORDEM OPOSTA).

28. Mostrar que se R e S são relações de equivalência sobre A, então a relação $R \cap S$ também é relação de equivalência sobre A.

29. Demonstrar que se a e b são elementos minimais de um conjunto totalmente ordenado A então $a = b$.

30. Abaixo está o diagrama simplificado (onde estão omitidas as propriedades reflexiva e transitiva) da **relação de ordem** R sobre $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.
Determinar os elementos notáveis de $A = \{d, e\}$.

31. Seja A um subconjunto não-vazio do conjunto E parcialmente ordenado pela relação "$\leq$" . Mostre que se A possui elemento máximo (mínimo), então ele é único. Conclua que o ínfimo (supremo) de A, se existir, também é único.

32. Consideremos a relação habitual de ordem $\leq$ sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o seguinte axioma:

Axioma do sup: Se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e possui cota superior (existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c$ para todo $a \in A$) então A possui supremo em $\mathbb{R}$.

Prove que se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e possui cota inferior (existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq a$ para todo $a \in A$) então A possui ínfimo em $\mathbb{R}$ (**Axioma do inf**).

(Sugestão: use que $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$ e o Axioma do sup no conjunto $-A = \{ -a \ ; \ a \in A \}$)

Capítulo 3

Funções

3.1 Conceitos básicos e exemplos

A definição de função

Definição 3.1. *Sejam A e B conjuntos não-vazios e f uma relação de A em B.*

Dizemos que f é uma FUNÇÃO (ou APLICAÇÃO) de A em B quando **para cada** $a \in A$ *existe um* **único** *elemento* $b \in B$ *tal que* $(a, b) \in f$ *.*

Obs.:

1. Se f é uma função de A em B, escrevemos $b = f(a)$ para indicar que $(a, b) \in f$ e lemos que "b é a imagem de a pela f".
2. Simbolicamente, escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B.
3. O conjunto B é chamado o CONTRADOMÍNIO de f.
4. Se $f : A \to B$ e $g : A \to B$ são funções, temos:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in A$$

Exemplos e contra-exemplos

(a) Sejam $A = \{\triangle, \bigstar, \square, \bigcirc\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e as seguintes relações de A em B:

$R_1 = \{(\triangle, 2), (\bigstar, 3), (\bigcirc, 4)\}$

$R_2 = \{(\square, 1), (\triangle, 3), (\bigcirc, 2), (\bigstar, 5)\}$

$R_3 = \{(\bigcirc, 2), (\square, 1), (\triangle, 2), (\bigstar, 3), (\square, 5)\}$

$R_4 = \{(\square, 3), (\triangle, 3), (\bigcirc, 4), (\bigstar, 1)\}$

(b) Considere as seguintes relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 = y^2 \right\}$

$R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$R_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = x^2 \right\}$

Imagem direta e imagem inversa

Seja $f : A \to B$ uma função de A em B.

Dado $X \subset A$, chama-se IMAGEM (DIRETA) de X segundo f e indica-se por $f(X)$ o seguinte subconjunto de B:

$$f(X) = \{ f(x) \,;\, x \in X \}$$

Dado $Y \subset B$, chama-se IMAGEM INVERSA de Y segundo f e indica-se por $f^{-1}(Y)$ o seguinte subconjunto de A:

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in A \,;\, f(x) \in Y \}$$

Exemplos:

(a) $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e $f : A \to B$ dada por

$$f(x) = x + 1 \,.$$

Temos: $f(\,\{3,5,7\}\,) = \{4,6,8\}$, $f(A) = \{2,4,6,8,10\}$, $f(\,\phi\,) = \phi$

$f^{-1}(\,\{2,4,10\}\,) = \{1,3,9\}$, $f^{-1}(B) = A$, $f^{-1}(\,\phi\,) = \phi$, $f^{-1}(\,\{0,1,3\}\,) = \phi$

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2$, temos:

$f(\,\{1,2,3\}\,) = \{1,4,9\}$, $f(\,[0,2)\,) = [0,4)$, $f(\,(-1,3]\,) = [0,9]$

$f^{-1}(\,\{0,2,16\}\,) = \left\{0, \pm\sqrt{2}, \pm 4\right\}$, $f^{-1}(\,[1,9]\,) = [-3,-1] \cup [1,3]$, $f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \phi$

(c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, temos:

$f(\mathbb{Q}) = \{0\}$, $f(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \{1\}$, $f(\ [0,1]\ ) = \{0,1\}$

$f^{-1}(\ \{0\}\ ) = \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\ [4,5)\ ) = \phi$

Propriedades da imagem direta: (EXERCÍCIO)

Sejam $f : A \to B$ uma função e $X, Y \subset A$.
1) Se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$.
2) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
3) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
4) $f(X \backslash Y) \supset f(X) \backslash f(Y)$.

Propriedades da imagem inversa: (EXERCÍCIO)

Sejam $f : A \to B$ uma função e $X, Y \subset B$.
1) Se $X \subset Y$ então $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.
2) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
3) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
4) $f^{-1}(X \backslash Y) = f^{-1}(X) \backslash f^{-1}(Y)$.

Alguns tipos especiais de funções

1) **Função Constante:**

Sejam A e B dois conjuntos não-vazios e seja b um elemento qualquer de B. Chama-se FUNÇÃO CONSTANTE de A em B, determinada pelo elemento b, a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in A$.

Exemplos:

(a) A função f de $A = \{\triangle, \square, \bigstar\}$ em $B = \{a, b, c\}$ dada por $f = \{\ (\triangle, c), (\square, c), (\bigstar, c)\ \}$ é uma função constante de A em B (determinada pelo elemento c).
(b) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma função constante.

2) **Função Idêntica:**

Seja A um conjunto não-vazio. Chama-se FUNÇÃO IDÊNTICA de A a função $f : A \to A$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

A função idêntica de A é também denominada IDENTIDADE de A e representada por $Id_A : A \to A$ ou $i_A : A \to A$.

Exemplos:

(a) A função idêntica de $B = \{a, b, c\}$ é $Id_B = \{ \ (a, a), (b, b), (c, c) \ \}$.

(b) A função identidade de $\mathbb{R}$, dada por $Id_{\mathbb{R}}(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem como gráfico cartesiano a reta que contém a bissetriz do primeiro quadrante.

3) **Função de Inclusão:**

Sejam A um conjunto não-vazio e $X \subset A$, $X \neq \phi$. Chama-se FUNÇÃO DE INCLUSÃO de X em A a função $f : X \to A$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

Se $X = A$ então a função de inclusão de X em A é a própria função idêntica de A.

Exemplo:

A função de inclusão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ é a função $f = \{ \ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \ldots \ \}$.

4) **Funções Monótonas:**

Sejam A e B dois conjuntos não-vazios, parcialmente ordenados por relações de ordem indicadas pelo mesmo símbolo "$\leq$" .

Vamos ainda escrever $x < y$ para indicar que $x \leq y$ e $x \neq y$.

$f : A \to B$ é uma função CRESCENTE quando $x \leq y$ em $A \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ em B.

$f : A \to B$ é uma função DECRESCENTE quando $x \leq y$ em $A \Rightarrow f(y) \leq f(x)$ em B.

Se f é crescente ou decrescente dizemos que f é MONÓTONA.

$f : A \to B$ é uma função ESTRITAMENTE CRESCENTE quando $x < y$ em $A \Rightarrow f(x) < f(y)$ em B.

$f : A \to B$ é uma função ESTRITAMENTE DECRESCENTE quando $x < y$ em $A \Rightarrow f(y) < f(x)$ em B.

Se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente dizemos que f é ESTRITAMENTE MONÓTONA.

Exemplos:

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ está ordenado pela relação "menor ou igual" , é uma função crescente, pois se $x \leq y$ em $\mathbb{R}$, então $f(x) = 1 \leq 1 = f(y)$ (f é também decrescente!).

(b) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ está ordenado pela relação "menor ou igual" , é uma função estritamente crescente, pois se $x < y$ em $\mathbb{R}$, então $g(x) = x < y = g(y)$.

(c) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ está ordenado pela relação "menor ou igual" , **não é crescente nem decrescente**. De fato, temos $-1 < 0$ em $\mathbb{R}$ com $f(0) = 0 < 1 = f(1)$ e $0 < 2$ em $\mathbb{R}$ com $f(0) = 0 < 4 = f(2)$.

(d) A função $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definida por $g(X) = A \backslash X$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, onde oconjunto $\mathcal{P}(A)$ das partes de A está ordenado pela relação de inclusão, é uma função estritamente decrescente, pois se $X \subsetneq Y$ em A, então $g(Y) = A \backslash Y \subsetneq A \backslash X = g(X)$.

Restrição e extensão

Sejam $f : A \to B$ e $X \neq \phi$ em A. A aplicação $f|_X : X \to B$ definida por $f|_X(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ é chamada RESTRIÇÃO de f ao subconjunto X .

Sejam $f : A \to B$ e $A' \supset A$. Toda aplicação $g : A' \to B$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, ou seja, tal que $g|_A = f$, é chamada uma EXTENSÃO de f ao conjunto A' .

Exemplos:

(a) Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$.
Se $X = \{2, 4, 6, \ldots\}$, então $f|_X = \{(2, 1/2), (4, 1/4), (6, 1/6), \ldots\}$ é a restrição de f ao conjunto dos inteiros pares maiores que 0.
A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(0) = 0$ e $g(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ é uma extensão de f ao conjunto $\mathbb{R}$.

(b) Sejam $\mathbb{C} = \{ x + iy \ ; \ x, y \in \mathbb{R} \}$ o conjunto dos números complexos ($\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \ : \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + i.0$).
Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $g(x) = |x|$.
Neste caso $g = f|_{\mathbb{R}}$ pois, dado $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x) = f(x + i.0) = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x| = g(x) \ .$$

3.2 Funções invertíveis: injetoras e sobrejetoras

Funções invertíveis

Definição 3.2. *Seja* $f : A \to B$ *uma função.* f *é, em particular, uma relação de* A *em* B *e como tal possui uma relação inversa* $f^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \, ; \, (x, y) \in f \} \subset B \times A$ *.*

A relação f^{-1} *pode ser ou não ser uma função !*

A função f *é dita INVERTÍVEL quando sua relação inversa* f^{-1} *é também uma função (de* B *em* A*, é claro). Neste caso* $f^{-1} : B \to A$ *é chamada a FUNÇÃO INVERSA de* f*.*

Vamos agora investigar, através de exemplos, condições para que uma função $f : A \to B$ seja invertível.

Exemplo 1) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\triangle, \bigstar, \square, \bigcirc\}$ e $f_1 : A \to B$ dada por

$$f_1 = \{ (1, \triangle), (2, \bigstar), (3, \square), (4, \triangle), (5, \bigcirc) \}$$

f_1 **não é** invertível, ou seja, sua relação inversa f_1^{-1} não é uma função, pois $\triangle$ se relaciona com 1 e 4 segundo f_1^{-1} . Observemos que este "problema" ocorreu porque dois elementos distintos de A têm a mesma imagem pela função f_1: $f_1(1) = \triangle = f_1(4)$.

Não é difícil generalizar: Dada uma função $f : A \to B$, se dois elementos distintos de A têm a mesma imagem pela função f, então f não é invertível.

Desta forma conseguimos obter uma condição **necessária** para que uma função $f : A \to B$ seja invertível:

Condição 1: Para que uma função $f : A \to B$ seja invertível é necessário que elementos distintos de A tenham sempre imagens distintas pela função f:

$$x_1 \neq x_2 \ \textbf{em} \ A \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo 2) Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\triangle, \bigstar, \square, \bigcirc\}$ e $f_2 : A \to B$ dada por

$$f_2 = \{ \, (a, \triangle), (b, \square), (c, \bigcirc) \, \}$$

f_2 **não é** invertível, ou seja, sua relação inversa f_2^{-1} não é uma função, pois $\bigstar$ não se relaciona com nenhum elemento de A segundo f_2^{-1} . Observemos que este "problema" ocorreu porque $\bigstar$ não é a imagem de nenhum elemento de A pela função f_2.

Novamente, não é difícil generalizar: Dada uma função $f : A \to B$, se algum elemento de B não é a imagem de nenhum elemento de A pela função f, então f não é invertível.

Assim, obtemos mais uma condição **necessária** para que uma função $f : A \to B$ seja invertível:

Condição 2: Para que uma função $f : A \to B$ seja invertível é necessário que cada elemento de B pertença à imagem de A pela função f:

$$y \in B \;\Rightarrow\; \textbf{Existe } x \in A \textbf{ tal que } f(x) = y$$

Funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras

As Condições 1 e 2 obtidas nos exemplos anteriores estão profundamente associadas à capacidade de uma dada função ser ou não ser invertível. Além de condições **necessárias** (como vimos) elas são, JUNTAS, condições **suficientes** para que uma dada função seja invertível, conforme veremos à frente. Por este motivo, funções que satisfazem a estas condições recebem denominações especiais:

- Uma função $f : A \to B$ é dita INJETORA (ou INJETIVA ou uma INJEÇÃO) quando elementos distintos de A têm sempre imagens distintas pela f, ou seja, quando satisfaz a "Condição 1".

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } A \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

• Uma função $f : A \to B$ é dita SOBREJETORA (ou SOBREJETIVA ou uma SOBREJEÇÃO) quando cada elemento de B pertence à imagem de A pela função f, ou seja, quando satisfaz a "Condição 2".

$$y \in B \;\Rightarrow\; \text{Existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

• Uma função $f : A \to B$ é dita BIJETORA (ou BIJETIVA ou uma BIJEÇÃO) quando ela é injetora e sobrejetora, ou seja, quanda satisfaz as condições 1 e 2 anteriores simultaneamente.

Exemplos:

(a) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\triangle, \bigstar, \Box, \bigcirc\}$ e $f_1 : A \to B$ dada por

$$f_1 = \{\,(1, \triangle), (2, \bigstar), (3, \Box), (4, \triangle), (5, \bigcirc)\,\}$$

f_1 é sobrejetora, mas não é injetora.

(b) Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\triangle, \bigstar, \Box, \bigcirc\}$ e $f_2 : A \to B$ dada por

$$f_2 = \{\,(a, \triangle), (b, \Box), (c, \bigcirc)\,\}$$

f_2 é injetora, mas não é sobrejetora.

(c) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
g não é injetora: $-3 \neq 3$ em $\mathbb{R}$, m as $g(-3) = 9 = g(3)$.
g não é sobrejetora: $-5 \notin f(\mathbb{R})$.

(d) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 3x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

h é injetora:
De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $h(x_1) = h(x_2)$.
Temos: $3x_1 + 1 = h(x_1) = h(x_2) = 3x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

h é sobrejetora:
De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, tomemos $x = \dfrac{y-1}{3} \in \mathbb{R}$.

Temos: $h(x) = h(\dfrac{y-1}{3}) = 3.\left(\dfrac{y-1}{3}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$.

Como h é injetora e sobrejetora, então dizemos que h é uma função bijetora (ou que h é uma bijeção) de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Exercício: Seja $f : A \to B$ uma função. Mostre que:
(a) Dado $Y \subset B$, $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.
(b) $f(f^{-1}(Y)) = Y$ para todo $Y \subset B \Leftrightarrow f$ é sobrejetora.
(c) Dado $X \subset A$, $f^{-1}(f(X)) \supset X$.
(d) $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subset A \Leftrightarrow f$ é injetora.

Finalmente, vamos agora caracterizar a invertibilidade de uma função:

Teorema 3.3. *Uma função $f : A \to B$ é invertível (ou seja, sua relação inversa $f^{-1} : B \to A$ é também uma função) se, e somente se, f é bijetora.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) f é injetora: Sejam $x \neq y \in A$. Suponhamos que $f(x) = f(y) = b \in B$. Temos: $(x, f(x)) \in f$ e $(y, f(y)) \in f$. Logo $(f(x), x) \in f^{-1}$ e $(f(y), y) \in f^{-1}$, ou seja, $(b, x) \in f^{-1}$ e $(b, y) \in f^{-1}$ com $b \in B$ e $x \neq y \in A$ (Contradição, pois f^{-1} é função). Então, obrigatoriamente, $f(x) \neq f(y)$ e f é injetora.

f é sobrejetora: Seja $b \in B$. Como $f^{-1} : B \to A$ é função, existe (um único) $a \in A$ tal que $(b, a) \in f^{-1}$, ou seja, $(a, b) \in f$, o que significa $b = f(a)$. Assim, f é sobrejetora.

Portanto f é bijetora (injetora e sobrejetora).

($\Leftarrow$) Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Dado $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$ (pois f é sobrejetora).

Como f é injetora, esse $a \in A$ tal que $f(a) = b$ é único.

Assim, dado $b \in B$ existe um único $a \in A$ tal que $(b, a) \in f^{-1}$, ou seja, f^{-1} é uma função.

Portanto f é invertível. ■

Exemplo:

Já vimos que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 3x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é bijetora e portanto, pelo Teorema acima, temos que h é invertível, ou seja, sua relação inversa $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é também uma função e temos

$$h^{-1} = \left\{ (y, x) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x, y) \in h \right\} = \left\{ (y, x) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = 3x + 1 \right\} = \left\{ (y, x) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = \frac{y-1}{3} \right\}.$$

Assim, $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $h^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$.

3.3 Composição de funções

Definição e exemplos

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções.
(Observe que: CONTRADOMÍNIO DE $f = B =$ DOMÍNIO DE g).

Dado $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $b = f(a)$ (pois f é função).

Como $f(a) = b \in B$ e g é função de B em C, existe um único $c \in C$ tal que $c = g(b) = g(f(a))$.

A relação R de A em C dada por

$$(a, c) \in R \Leftrightarrow c = g(f(a))$$

é a relação composta $g \circ f$ (ver Exercício 4 da pág. 25) e não é difícil perceber que $g \circ f$ é também uma função $g \circ f : A \to C$.

Definição 3.4. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções.*
A FUNÇÃO COMPOSTA $g \circ f : A \to C$ (lê-se g composta com f) é a função dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall\, x \in A\ .$$

Exemplos:

(a) Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$, $C = \{1, 2, 3\}$,
$f : A \to B$ dada por $f = \{(a, \square), (b, \bigcirc), (c, \square)\}$ e
$g : B \to C$ dada por $g = \{(\triangle, 1), (\square, 1), (\bigcirc, 3)\}$.

$g \circ f : A \to C$ é dada por $g \circ f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 1)\}$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$.

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = 9x^2 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Propriedades da composição de funções (EXERCÍCIO)

1) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções. Então:
(a) Se $X \subset A$ então $(g \circ f)(X) = g(f(X))$.
(b) Se $Z \subset C$ então $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

2) Se $f : A \to B$ é uma função qualquer, então $f \circ Id_A = f = Id_B \circ f$.

3) Quaisquer que sejam as funções $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, tem-se: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (a composição de funções é associativa).

4) Se as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetora.

5) Se as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são injetoras, então a função composta $g \circ f : A \to C$ também é injetora.

6) Se as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijetoras (invertíveis), então a função composta $g \circ f : A \to C$ também é bijetora (invertível) e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

7) Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $g \circ f : A \to C$. Então:
(a) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.
(b) Se $g \circ f$ é injetora, então f é injetora.

8) Se $f : A \to B$ é bijetora (invertível) então $f \circ f^{-1} = Id_B$ e $f^{-1} \circ f = Id_A$.

9) Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são funções tais que $g \circ f = Id_A$ e $f \circ g = Id_B$ então f e g são bijetoras (invertíveis), $g = f^{-1}$ e $f = g^{-1}$.

3.4 Famílias indexadas de conjuntos e produtos cartesianos em geral

Famílias indexadas

Definição 3.5. *Seja X um conjunto não-vazio. Uma FAMÍLIA INDEXADA de elementos de X é uma função $x : L \to X$, sendo L um conjunto não-vazio, chamado o* **conjunto dos índices da família**.

Para simplificar a notação, dado um índice $\lambda \in L$, representamos $x(\lambda)$ por x_λ e a família $x : L \to X$ é representada por $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Exemplos:

(a) Sejam $L = \{1, 2\}$ o conjunto de índices e $X = \{\triangle, \square, \bigcirc, \bigstar\}$.

$(x_\lambda)_{\lambda \in L} = (x_1, x_2) = (\triangle, \bigstar)$ é uma família indexada de elementos de X com índices em L. Neste caso a função $x : L \to X$ é dada por $x(1) = \triangle$ e $x(2) = \bigstar$.

(b) Consideremos agora o conjunto de índices $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $X = \mathbb{R}$.

$(x_\alpha)_{\alpha \in I} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, \sqrt{2}, 0, 5, 1/3)$ é uma família indexada de números reais com índices em I.

Obs.: Em geral, quando o conjunto de índices L é do tipo $L = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$, cada família indexada $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ de elementos de um conjunto X é chamada uma n-upla de elementos de X e representada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(c) Fixemos o conjunto de índices $L = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$ e consideremos $X = \mathbb{Z}$.

Seja então $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família indexada de números inteiros com índices em L dada por: $x(1,1) = -3$, $x(1,2) = 0$, $x(2,1) = 5$, $x(2,2) = 4$, $x(3,1) = 0$ e $x(3,2) = -1$.

Costumamos representar $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ da seguinte forma:

$$(x_\lambda)_{\lambda \in L} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obs.: Em geral, quando o conjunto de índices L é do tipo $L = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, cada família indexada $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ de elementos de um conjunto X é chamada uma $m \times n$ MATRIZ de elementos de X e representada por

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

(d) Sejam agora $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto de índices, $X = \mathbb{R}$ e $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a função dada por $x(n) = \dfrac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família de números reais com índices em $\mathbb{N}$ e temos

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$$

Obs.: Em geral, quando o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é o conjunto de índices, cada família indexada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de um conjunto X é chamada uma SEQUÊNCIA de elementos de X e representada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(e) Sejam $\mathcal{C}$ a coleção das retas de um plano α ($\mathcal{C}$ será o conjunto de índices), P um ponto do plano α, $X = \mathbb{R}$ e $x : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ a função dada por $x(r) =$ distância de P a r.

Então $(x_r)_{r\in\mathcal{C}}$ é uma família indexada de números reais com índices em $\mathcal{C}$.

Famílias indexadas de conjuntos

Seja $L \neq \phi$ um conjunto de índices.

Se, em particular, $X \neq \phi$ é uma coleção cujos elementos são **conjuntos**, então uma família indexada de elementos de X com índices em L é chamada uma FAMÍLIA INDEXADA DE CONJUNTOS (com índices em L).

Exemplos:

(a) Sejam $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o conjunto de índices, $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \neq \phi$ (coleção de conjuntos) e $X_1 = \phi$, $X_2 = \{1, 3, 5\}$, $X_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X_4 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $X_5 = \mathbb{N} \in X$.

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (X_\alpha)_{\alpha\in L}$ é uma 5-upla de conjuntos em X.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $X_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$.

Por exemplo: $X_1 = (-1, 1)$, $X_5 = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$, etc.

Neste caso, temos uma família indexada de conjuntos em $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ com índices em $\mathbb{N}$, ou seja, temos uma sequência de conjuntos (de números reais).

Uniões e interseções de famílias indexadas de conjuntos:

Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família indexada de conjuntos. Definimos:

$$\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \{\ x\ ;\ \exists\ \lambda \in L\ \text{ com } x \in A_\lambda\ \} \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda = \{\ x\ ;\ x \in A_\lambda \quad \forall\ \lambda \in L\ \}\ .$$

Exemplos:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o conjunto $A_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1 + n\right] \subset \mathbb{R}$.

Temos: $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots =$

$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots =$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ consideremos o conjunto $I_x = (x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$.

Temos: $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} I_x =$ e $\displaystyle\bigcap_{x\in\mathbb{R}} I_x =$

Proposição 3.6. *(Exercício)*

Seja $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *uma família indexada de conjuntos num universo* U*. Então:*

$$C\,(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in L} CA_\lambda \qquad e \qquad C\,(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in L} CA_\lambda\ .$$

Proposição 3.7. *(Exercício)*

Sejam $f : A \to B$ *uma função,* $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *uma família indexada de subconjuntos não-vazios de* A *e* $(B_\delta)_{\delta\in M}$ *uma família indexada de subconjuntos não-vazios de* B*. Então:*

(a) $\displaystyle f(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in L} f(A_\lambda)$ *(b)* $\displaystyle f(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in L} f(A_\lambda)$

(c) $\displaystyle f^{-1}(\bigcup_{\delta\in M} B_\delta) = \bigcup_{\delta\in M} f^{-1}(B_\delta)$ *(d)* $\displaystyle f^{-1}(\bigcap_{\delta\in M} B_\delta) = \bigcap_{\delta\in M} f^{-1}(B_\delta)$

Produtos cartesianos em geral

Definição 3.8. *Seja* $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ *uma família indexada de conjuntos.*

Seu PRODUTO CARTESIANO, indicado por $\displaystyle\prod_{\lambda\in L} A_\lambda$ *, é uma coleção particular de funções de* L *em* $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ *.*

O produto cartesiano $\displaystyle\prod_{\lambda\in L} A_\lambda$ *é o conjunto de todas as famílias indexadas* $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ *de elementos de* $\displaystyle X = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ *tais que* $a_\lambda \in A_\lambda$ *para todo* $\lambda \in L$ *.*

Observações:

1) No caso particular em que $A_\lambda = A$ para todo $\lambda \in L$, temos $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = A$ e costumamos escrever $\displaystyle\prod_{\lambda\in L} A_\lambda = A^L$ (neste caso temos todas as funções de L em A).

2) Veremos logo no primeiro exemplo que a definição acima generaliza o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos, visto no início do capítulo anterior, sobre Relações.

3) Quando existe um $\lambda \in L$ tal que $A_\lambda = \phi$ então $\prod_{\lambda \in L} A_\lambda = \phi$.

Exemplos:

(a) Sejam $L = \{1, 2\}$ e $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família indexada de conjuntos (A_1, A_2) , com $A_1 = \{a, b\}$ e $A_2 = \{\square, \triangle, *\}$.

O produto cartesiano $\prod_{\lambda \in L} A_\lambda = A_1 \times A_2$ é o conjunto de todas as famílias indexadas $(a_\lambda)_{\lambda \in L} = (a_1, a_2)$ de elementos de $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A_1 \cup A_2 = \{a, b, \square, \triangle, *\}$ tais que $a_1 \in \{a, b\}$ e $a_2 \in \{\square, \triangle, *\}$.

Assim $\prod_{\lambda \in L} A_\lambda = A_1 \times A_2 = \{(a, \square), (a, \triangle), (a, *), (b, \square), (b, \triangle), (b, *)\}$, o que coincide com o conceito anterior de produto cartesiano de dois conjuntos.

(b) Sejam $L = \{1, 2, 3, 4\}$ e $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, com $A_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \mathbb{Q}$, $A_3 = \mathbb{Z}$, $A_4 = \mathbb{N}$.

O produto cartesiano $\prod_{\lambda \in L} A_\lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ é o conjunto de todas as famílias indexadas $(a_\lambda)_{\lambda \in L} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ de elementos de $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \mathbb{R} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ tais que $a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{Q},\ a_3 \in \mathbb{Z}$ e $a_4 \in \mathbb{N}$.

(c) Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto de índices e $A_n = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O produto cartesiano $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \times A_2 \times \ldots = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as famílias indexadas $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots)$ de elementos de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \cup \ldots = \mathbb{R}$ tais que $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ (ou todas as sequências de números reais).

(d) Sejam $L = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de índices e $(A_\lambda)_{\lambda \in L} = (A_X)_{X \subset \mathbb{R}}$ a família indexada de conjuntos dada por:

$A_X = X$ se $X \subset \mathbb{R}$ tem elemento máximo (ordem usual $\leq$) e

$A_X = \{\,*\,\}$ se $X \subset \mathbb{R}$ não possui elemento máximo.

O produto cartesiano $\prod_{\lambda \in L} A_\lambda = \prod_{X \subset \mathbb{R}} A_X$ é o conjunto de todas as famílias indexadas $(a_X)_{X \subset \mathbb{R}}$ de elementos de $\bigcup_{X \subset \mathbb{R}} A_X = \mathbb{R} \cup \{\,*\,\}$ tais que $a_X \in A_X$ para todo índice $X \subset \mathbb{R}$.

O Axioma da Escolha

Sejam $\mathcal{S}$ uma coleção de conjuntos não-vazios (não necessariamente disjuntos) e $\bigcup_{C\in\mathcal{S}} C = \{\, x \,;\, x \in C$ para algum $C \in \mathcal{S}\,\}$. Uma FUNÇÃO ESCOLHA em $\mathcal{S}$ é uma função $c : \mathcal{S} \to \bigcup_{C\in\mathcal{S}} C$ que satisfaz $c(C) \in C$ para todo $C \in \mathcal{S}$.

Exemplo: Seja $\mathcal{S} = \left\{\, \{a, b, c\} \,,\, \{\Box, \triangle\} \,,\, \mathbb{Z} \,,\, \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\} \,\right\}$.

A função $c : S \to \bigcup_{C\in\mathcal{S}} C$ dada por

$$c\,(\{a, b, c\}) = a\,,\ c\,(\{\Box, \triangle\}) = \triangle\,,\ c\,(\mathbb{Z}) = -7 \ \text{ e } \ c\left(\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}\right) = \sqrt{2}$$

é uma função escolha (bem definida) em $\mathcal{S}$.

A questão é: quando $\mathcal{S}$ é uma coleção "muito grande" (veremos o que isso significa no próximo capítulo) de conjuntos, SEMPRE existe (pelo menos) uma função escolha bem definida em $\mathcal{S}$?

O Axioma da Escolha nos garante que sim:

- **Axioma da Escolha:** Seja $\mathcal{S}$ uma coleção de conjuntos não-vazios. Então existe (pelo menos) uma função escolha em $\mathcal{S}$.

Observações:

1) O Axioma da Escolha é EQUIVALENTE ao Princípio da Boa Ordenação e ao Lema de Zorn (veja no fim do Capítulo 2 - Relações).

2) Nem sempre precisamos lançar mão do Axioma da Escolha para garantir a existência de uma função escolha em uma coleção de conjuntos não vazios (veja o Exemplo acima), mesmo em certos casos em que a coleção $\mathcal{S}$ é muito grande.

Por exemplo, seja $\mathcal{S}$ a coleção de todos os subconjuntos não-vazios de $\mathbb{N}$. A função $c : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ dada por $c(X) = \min X$ é uma função escolha muito bem definida em $\mathcal{S}$.

Por este motivo, quando realmente utilizamos o Axioma da Escolha, é usual mencionarmos tal utilização.

Exercício: Obtenha uma utilização do Axioma da Escolha em produtos cartesianos em geral.

3.5 Exercícios

1. Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Identifique quais das relações de A em B dadas abaixo são funções de A em B:
(a) $R_1 = \{(a, 1), (b, 4), (c, 5)\}$.
(b) $R_2 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 5)\}$.
(c) $R_3 = \{(a, 2), (b, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 4)\}$.
(d) $R_4 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$.

2. Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Seja $f : A \to B$ a função dada por $f(0) = 7,\ f(1) = 8,\ f(2) = 6,\ f(3) = 7,\ f(4) = 8,\ f(5) = 9$.
Obtenha: $f(\{0, 1\})$, $f(\{0, 3\})$, $f(\{1, 2, 5\})$, $f(A)$, $f^{-1}(\{7, 8\})$, $f^{-1}(\{9, 10\})$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Obtenha: $f(1)$, $f(-3)$, $f(1 - \sqrt{2})$, $f([-1, 1])$, $f((-1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([-1, 3])$ e $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Obtenha: $f([0, \pi/2])$, $f([-\pi/2, \pi/2])$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(1/2)$, $f^{-1}([1/2, 1])$, $f^{-1}((-1, 2])$, $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$.

5. Para cada uma das funções dadas abaixo, identifique (provando) se a função dada é ou não injetora e se ela é ou não sobrejetora. Obtenha ainda a função inversa daquelas que forem invertíveis:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$.
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \operatorname{sen} x$.
(d) $r : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ dada por $r(x) = \operatorname{sen} x$.
(e) $s : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ dada por $s(x) = \operatorname{sen} x$.
(f) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $a(x) = -5x + 2$.
(g) $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $m(x) = x + |x|$.
(h) $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ dada por $p(x) = 2^x$.

6. Sejam $f : A \to B$ uma função e $X \neq \phi$ um subconjunto de A. Se f é injetora (sobrejetora), podemos garantir que a restrição $f\,|_X$ é também injetora (sobrejetora) ? Se a resposta é sim, PROVE. Se a resposta é não, APRESENTE UM CONTRA-EXEMPLO. Como fica este exercício se, ao invés da restrição de f a $X \subset A$ temos uma extensão de f a $A' \supset A$.

7. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes reais e $a \neq 0$, é uma bijeção e obtenha f^{-1} .

8. Prove que a função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ é bijetora e obtenha sua inversa.

9. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dada por $f(x,y) = (2x+3, 4y+5)$. Prove que f é injetora. Verifique se f é bijetora.

10. Obtenha uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja injetora mas não sobrejetora. Obtenha uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja sobrejetora mas não injetora.

11. Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Prove existe uma função sobrejetora $g : B \to A$. (Obs.: Se existe uma função sobrejetora de B em A é possível mostrar que existe uma função injetora de A em B, mas para isso devemos usar o Axioma da Escolha !!!).

12. Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{8,9,0\}$. Sejam $f : A \to B$ a função dada por $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 6$ e $g : B \to C$ a função dada por $g(4) = 8$, $g(5) = 8$, $g(6) = 9$, $g(7) = 0$ Quais são os pares ordenados de $g\circ f$? A função $g\circ f$ é injetora ? Ela é sobrejetora ? (Justifique).

13. Sejam f, g e h funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x-1$, $g(x) = x^2+2$ e $h(x) = x+1$. Determinar $f\circ g$, $f\circ h$, $g\circ h$, $g\circ f$, $h\circ f$, $h\circ g$. Verifique ainda que $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$.

14. Dê exemplos de funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f\circ g \neq g\circ f$.

15. Considere a seguinte família de subconjuntos de $\mathbb{R}$: $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, onde $A_i = \left[0, 1+\dfrac{1}{i}\right)$.

Obtenha $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ e $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ se $x \le 0$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se $x > 0$.
Obtenha $f([-1,8])$, $f(\mathbb{R}^-)$, $f^{-1}(\{1,16\})$, $f^{-1}([-1,16])$, $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$.

17. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x+1$ se $x \ge 0$, $f(x) = -x+1$ se $x < 0$ e $g(x) = 3x-2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determinar as compostas $f\circ g$ e $g\circ f$.

18. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 2x+7$ e $(f\circ g)(x) = 4x^2-2x+3$. Obtenha g .

19. Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ e seja $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}^*$ a função dada por $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Obtenha $f\circ g$ e $g\circ f$. O que se pode concluir ?

20. Sejam $f, g : E \to F$ e $h : F \to G$. Se h é injetora e $h\circ f = h\circ g$, mostre que $f = g$.

21. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as bijeções dadas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$.
Verifique (mostrando as contas) que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

22. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.
(a) f é injetora ? Justifique.
(b) f é sobrejetora ? Justifique.
(c) Obtenha $f^{-1}(\{0\})$.
(d) Obtenha $f([0,1] \times [0,1])$.
(e) Se $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = y \}$, obtenha $f(A)$.

23. Mostre que se $f : A \to B$ é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer conjuntos X e Y contidos em A.

24. Mostre que se $f : A \to B$ é injetora então $f(X \backslash Y) = f(X) \backslash f(Y)$ para quaisquer conjuntos X e Y contidos em A.

25. Mostre que $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, $f(A \backslash X) = f(A) \backslash f(X)$ para qualquer conjuntos X contidos em A.

26. Sejam $L = \mathbb{R}$ o conjunto de índices e $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ a família indexada de conjuntos dada por: $A_\lambda = \{1, 2, 3, \ldots, \lambda\}$ se $\lambda \in \mathbb{N}$ e $A_\lambda = \mathbb{N}$ se $\lambda \notin \mathbb{N}$.

Descreva o produto cartesiano $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathbb{R}} A_\lambda$ (compare o produto cartesiano acima com a coleção de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{N}$).

Dê exemplos de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{N}$ que estão e que não estão no produto cartesiano. Quais funções constantes de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{N}$ estão no produto cartesiano acima ? (Justifique)

27. Sejam $L = \mathbb{N}$ o conjunto de índices e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a família intervalos da Reta Real dada por: $A_n = [-1/n, n) \subset \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quais das seqüências dadas abaixo pertencem ao produto cartesiano $\displaystyle\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$? (Justifique)
(a) $(x_n) = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots)$.
(b) $(y_n) = (1, -1/2, 2, -1/3, 3, -1/4, 4, \ldots)$.
(c) $(z_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots)$.
(d) $(h_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots)$
(e) $(w_n) = \left(\dfrac{n^2 - n}{27} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

28. Estabeleça uma família de conjuntos tal que o conjunto de índices seja $L = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e descreva seu produto cartesiano.

Capítulo 4

Cardinalidade, conjuntos infinitos, etc.

4.1 Conjuntos de mesma cardinalidade

Definições e exemplos iniciais

Definição 4.1. *Dizemos que dois conjuntos A e B TÊM A MESMA CARDINALIDADE, e escrevemos* $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ *(ou então $|A| = |B|$), quando existe uma função bijetora $f : A \to B$ ou então quando $A = \phi = B$.*

Exemplos:

(a) Os conjuntos $S = \{\Box, \triangle, \bigcirc, \bigstar, *, \Diamond\}$ e $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade pois, por exemplo, $f : S \to I_6$ dada por $f(\Box) = 1$, $f(\triangle) = 5$, $f(\bigstar) = 2$, $f(*) = 3$, $f(\bigcirc) = 6$, $f(\Diamond) = 4$ é uma função bijetora de S em I_6.

(b) Os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade pois, por exemplo, $g : \mathbb{N} \to P$ dada por $g(n) = 2n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ é uma função bijetora.

(c) A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ é bijetora (exercício).

Portanto, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o intervalo $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade.

Observações:

(i) Dizer que os conjuntos A e B têm a mesm cardinalidade significa dizer que eles possuem "a mesma quantidade" de elementos.

(ii) A relação R num universo de conjuntos dada por $A\,R\,B \;\Leftrightarrow\; \mathrm{card}\,(A) = \mathrm{card}\,(B)$ é uma relação de **equivalência** (reflexiva, simétrica e transitiva).

Exercícios:

1) Mostre que $\mathrm{card}\,(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}\,(\mathbb{N})$ diretamente, exibindo uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$. Mostre também que $\mathrm{card}\,(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}\,(\mathbb{Z}^*)$.

2) Sejam $a < b$ dois números reais e $I = (a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \;;\; a < x < b \,\}$ (intervalo aberto de extremidades a e b).

Se I_2 é o intervalo aberto $I_2 = (0,2)$, mostre que $\mathrm{card}\,(I) = \mathrm{card}\,(I_2)$ e conclua que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais tem a mesma cardinalidade que qualquer de seus subintervalos abertos com extremos em $\mathbb{R}$.

3) Mostre que se $\mathrm{card}\,(A) = \mathrm{card}\,(B)$ então $\mathrm{card}\,(\mathcal{P}(A)) = \mathrm{card}\,(\mathcal{P}(B))$.

4) Mostre que se $\mathrm{card}\,(A) = \mathrm{card}\,(C)$ e $\mathrm{card}\,(B) = \mathrm{card}\,(D)$, com $A \cap B = \phi = C \cap D$, então $\mathrm{card}\,(A \cup B) = \mathrm{card}\,(C \cup D)$. Dê um contra-exemplo mostrando que o resultado não vale quando os conjuntos não são disjuntos.

5) Mostre que se $\mathrm{card}\,(A) = \mathrm{card}\,(C)$ e $\mathrm{card}\,(B) = \mathrm{card}\,(D)$, então $\mathrm{card}\,(A \times B) = \mathrm{card}\,(C \times D)$. Conclua que $\mathrm{card}\,(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) = \mathrm{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Ordem nas cardinalidades

Dados dois conjuntos A e B, escrevemos $\mathrm{card}\,(A) \leq \mathrm{card}\,(B)$ quando existe uma função injetora $f : A \to B$ (equivalentemente, existe uma função sobrejetora $g : B \to A$) ou quando $A = \phi$. Nestes casos, dizemos que a cardinalidade de A É MENOR OU IGUAL à cardinalidade de B.

Exemplos:

(a) Se $A \subset B$ então $\mathrm{card}\,(A) \leq \mathrm{card}\,(B)$.

De fato, se $A \subset B$ então $f : A \to B$ dada por $f(a) = a \quad \forall\, a \in A$ é uma função inetora (mostre) e portanto $\mathrm{card}\,(A) \leq \mathrm{card}\,(B)$.

Em particular: $\mathrm{card}\,(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}\,(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{card}\,(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{card}\,(\mathbb{R})$.

(b) Para todo conjunto A, temos: $\mathrm{card}\,(A) \leq \mathrm{card}\,(\mathcal{P}(A))$.

De fato, $g : A \to \mathcal{P}(A)$ dada por $g(a) = \{a\} \quad \forall\, a \in A$ é injetora (mostre).

Em particular, $\mathrm{card}\,(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(c) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer com $B \neq \phi$. Então $\text{card}\,(A) \leq \text{card}\,(A \times B)$.

De fato, como $B \neq \phi$, podemos então fixar $b \in B$ e a função $f : A \to A \times B$ dada por $f(a) = (a, b) \quad \forall\, a \in A$ é injetora.

Em particular, $\text{card}\,(\mathbb{N}) \leq \text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

(d) Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(m, n) = 2^m.3^n$.

O **Teorema Fundamental da Aritmética** (?) nos garante que f é injetora e portanto $\text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq \text{card}\,(\mathbb{N})$.

Observação:

A "relação" dada por $\text{card}\,(A)\, R\, \text{card}\,(B) \Leftrightarrow \text{card}\,(A) \leq \text{card}\,(B)$ funciona como uma ordem parcial entre as cardinalidades. É fácil ver que ela é reflexiva e transitiva. Embora bem intuitivo, o fato (de grande utilidade) de ela ser anti-simétrica não é tão simples de ser demonstrado e constitui o ...

Teorema 4.2. *(Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein) Se existem uma função injetora $f : A \to B$ (ou seja, $\text{card}\,(A) \leq \text{card}\,(B)$) e uma função sobrejetora $g : A \to B$ (ou seja, $\text{card}\,(B) \leq \text{card}\,(A)$), então existe uma função bijetora $h : A \to B$, ou seja, os conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade ($\text{card}\,(A) = \text{card}\,(B)$).*

Para ilustrar a utilidade do Teorema, dos exemplos C e D anteriores, podemos concluir (a partir do Teorema) que $\text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N})$ sem precisar exibir uma bijeção entre os conjuntos.

Exercícios:

1) Obtenha uma função sobrejetora (óbvia) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$.

Conclua que $\text{card}\,(\mathbb{Q}) = \text{card}\,(\mathbb{N})$.

2) Seja $f : (0, 1) \to \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (irracionais) a função dada por $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e $f(x) = x + \sqrt{2}$ se $x \in \mathbb{Q}$.

f está bem definida ? Mostre que f é injetora e conclua que $\text{card}\,(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \text{card}\,(\mathbb{R})$.

Para concluir esta parte, dados dois conjuntos A e B, escrevemos $\text{card}\,(A) < \text{card}\,(B)$ quando $\text{card}\,(A) \leq \text{card}\,(B)$ mas A e B **não têm** a mesma cardinalidade.

Neste caso, dizemos que a cardinalidade de A é ESTRITAMENTE MENOR do que a cardinalidade de B.

Exemplos:

(a) Fixado qualquer $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.
Temos $\text{card}\,(I_n) < \text{card}\,(\mathbb{N})$.

De fato, já temos que $\text{card}\,(I_n) \leq \text{card}\,(\mathbb{N})$, pois $I_n \subset \mathbb{N}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $f : I_n \to \mathbb{N}$ uma função.

Tomemos $k = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \in \mathbb{N}$.

Como $k > f(i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, é claro que f não é sobrejetora.

Assim, nenhuma função de I_n em $\mathbb{N}$ pode ser bijetora e temos então $\text{card}\,(I_n) < \text{card}\,(\mathbb{N})$.

(b) Já vimos que $\text{card}\,(A) \leq \text{card}\,(\mathcal{P}(A))$ para todo conjunto A.
Agora veremos que $\text{card}\,(A) < \text{card}\,(\mathcal{P}(A))$ para todo conjunto A.

De fato, o caso em que $A = \phi$ é imediato.

Sejam então $A \neq \phi$ e $f : A \to \mathcal{P}(A)$ uma função.

Definamos $Y = \{\, x \in A \,;\, x \notin f(x) \,\} \in \mathcal{P}(A)$ $(Y \subset A)$.

Suponhamos que exista $a \in A$ tal que $f(a) = Y$. Temos então:

$a \in Y \;\Rightarrow\; a \notin f(a) = Y$ (Contradição!)

$a \notin Y = f(a) \;\Rightarrow\; a \in Y$ (Contradição!)

Então, obrigatoriamente, $\nexists\, a \in A$ tal que $f(a) = Y$ e f não é sobrejetora (qualquer que seja a função $f : A \to \mathcal{P}(A)$).

Portanto, podemos concluir que $\text{card}\,(A) < \text{card}\,(\mathcal{P}(A))$ para todo conjunto A.

4.2 Conjuntos finitos/infinitos

Definição e exemplos iniciais

A definição de conjunto finito envolve a idéia de **contagem** e, para isso, utilizamos o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais.

O conjunto $\mathbb{N}$ pode ser caracterizado pelos chamados AXIOMAS DE PEANO:

a.1) Existe uma função injetora $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada número $n \in \mathbb{N}$ o seu sucessor $s(n) = n + 1$.

a.2) Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ que não é sucessor de nenhum outro.

a.3) Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (ou seja, se $n \in X$ então $s(n) = n+1 \in X$) então $X = \mathbb{N}$ (Princípio da Indução).

Obs.: O Princípio da Indução é equivalente ao fato de $\mathbb{N}$ ser bem ordenado (todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$ possui elemento mínimo) com a ordem usual $\leq$ (Exercício).

Para definirmos conjuntos finitos consideremos, para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $I_n = \{ 1, 2, 3, \ldots, n \} \subset \mathbb{N}$.

Definição 4.3. *Um conjunto A é um conjunto FINITO quando $A = \phi$ ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma função* **bijetora** $f : I_n \to A$ *(equivalentemente, existe $g : A \to I_n$ bijetora).*

Tal função bijetora $f : I_n \to A$ é chamada uma CONTAGEM dos elementos do conjunto A, dizemos que A tem n elementos e, fazendo $f(i) = a_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, escrevemos $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$.

Um conjunto que não é finito é dito INFINITO.

Exemplos:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $I_n = \{1, 2 \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ é finito e tem n elementos (imediato).

(b) O conjunto $S = \{\square, \triangle, \bigcirc, \bigstar, *, \Diamond\}$ é finito e tem 6 elementos.

De fato, a função $f : I_6 \to S$ dada por $f(1) = \square$, $f(2) = \bigcirc$, $f(3) = \Diamond$, $f(4) = \triangle$, $f(5) = *$, $f(6) = \bigstar$ é bijetora.

(c) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito.

De fato, quando provamos que $\operatorname{card}(I_n) < \operatorname{card}(\mathbb{N})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostramos que não pode haver nenhuma função sobrejetora de I_n em $\mathbb{N}$ (para todo $n \in \mathbb{N}$).

Portanto $\mathbb{N}$ não é finito, isto é, $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Alguns resultados

- Se A é finito e $a \in A$ então $A \setminus \{a\}$ é finito.
- Todo subconjunto de um conjunto finito é também finito.
- Se A e B são conjuntos tais que B é finito e $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ (ou seja, existe $f : A \to B$ injetora, ou existe $g : B \to A$ sobrejetora), então A é finito.

• Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ uma família **finita** (o conjunto de índices é finito) de conjuntos. Temos:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \text{ é um conjunto finito se, e só se, cada } A_i \text{ é um conjunto finito.}$$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \ldots \times A_n \text{ é um conjunto finito se, e só se, cada } A_i \text{ é um conjunto finito.}$$

Exercícios:

1) Prove que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são todos conjuntos infinitos.

2) Prove que o conjunto $R = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ dos naturais primos é infinito. (Sugestão: Procure a prova clássica de Euclides...)

3) Prove que se A é infinito então $\mathcal{P}(A)$ é infinito.

4) Se X é um conjunto infinito, mostre que $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(X)$ (este exercício nos diz que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é de certa forma o "menor dos conjuntos infinitos")

(Sugestão: Tente definir "indutivamente" uma função injetora $f : \mathbb{N} \to X$. Você consegue perceber o Axioma da Escolha por trás desta construção ?)

5) Dê contra-exemplos mostrando que é necessário que tenhamos famílias finitas de conjuntos para termos as conclusões do último resultado acima, sobre uniões e produtos cartesianos.

4.3 Conjuntos enumeráveis/não-enumeráveis

Definição e exemplos iniciais

Definição 4.4. *Um conjunto A é um conjunto ENUMERÁVEL quando A é finito ou então existe uma função* **bijetora** $f : \mathbb{N} \to A$ *(equivalentemente, existe* $g : A \to \mathbb{N}$ *bijetora).*

Tal função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$ *é chamada uma ENUMERAÇÃO dos elementos do conjunto A e, fazendo* $f(n) = a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *, escrevemos* $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \}$ *.*

Um conjunto que não é enumerável é dito NÃO-ENUMERÁVEL.

Exemplos:

(a) $\mathbb{N}$ é obviamente um conjunto (infinito) enumerável.

(b) Já vimos que $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{Z}) = \operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Segue então que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são todos conjuntos enumeráveis.

(c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é um conjunto não-enumerável.

De fato, já mostramos que $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(A))$ para todo conjunto A, provando que não existe nenhuma função sobrejetora de A em $\mathcal{P}(A)$.

Em particular, não existe bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e portanto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é um conjunto não-enumerável.

Alguns resultados

- Todo subconjunto de um conjunto enumerável é também enumerável.

- Se A e B são conjuntos tais que B é enumerável e $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(B)$ (ou seja, existe $f : A \to B$ injetora, ou existe $g : B \to A$ sobrejetora), então A é enumerável.

- Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família **enumerável** (o conjunto de índices é enumerável) de conjuntos. Temos:

$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto enumerável se, e só se, cada A_λ é um conjunto enumerável.

Exercícios:

1) Prove que se X é infinito então $\mathcal{P}(X)$ é não-enumerável.

2) Dê um contra-exemplo mostrando que é necessário que tenhamos famílias enumeráveis de conjuntos para termos a conclusão do último resultado acima, sobre união de famílias enumeráveis.

3) Sejam $A = \{0,1\}$ e $A^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \displaystyle\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ a coleção de todas as seqüências formadas com os algaarismos 0 e 1 = coleção de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $A = \{0,1\}$.

Prove que o conjunto $A^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é não-enumerável (este exercício mostra que mesmo produtos cartesianos enumeráveis de conjuntos finitos podem ser não-enumeráveis).

(Sugestão: Estabeleça uma bijeção entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $A^{\mathbb{N}}$)

4) Mostre que a coleção $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

4.4 Números cardinais

Definição e exemplos iniciais

Definição 4.5. *Dado um conjunto A qualquer, representamos por* $\text{card}\,(A)$ *(ou* $|A|$*) e chamamos de CARDINALIDADE do conjunto A a "quantidade de elementos de A".*

As cardinalidades dos conjuntos são chamadas NÚMEROS CARDINAIS e a noção acima é compatível com a noção anterior de "possuir a mesma cardinalidade", ou seja, se existe uma função bijetora $f : A \to B$ *então existe um número cardinal* λ *que representa tanto a cardinalidade de A quanto a de B:*

$$\text{card}\,(A) \;=\; \lambda \;=\; \text{card}\,(B)$$

Exemplos de números cardinais

(a) $\text{card}\,(\,\phi\,) = 0$: O número 0 (zero) é o número cardinal que representa a cardinalidade do conjunto vazio ϕ .

(b) $\text{card}\,(I_1) = \text{card}\,(\{1\}) = 1$: O número 1 (um) é o número cardinal que representa a cardinalidade do conjunto I_1 e de todos os conjuntos finitos que têm 1 elemento, ou seja, todos os conjuntos A tais que existe uma função bijetora $f : I_1 \to A$ (escrevemos $\text{card}\,(A) = 1$).

$\text{card}\,(I_6) = \text{card}\,(\{1,2,3,4,5,6\}) = 6$: O número 6 (seis) é o número cardinal que representa a cardinalidade do conjunto I_6 e de todos os conjuntos finitos que têm 6 elementos, ou seja, todos os conjuntos A tais que existe uma função bijetora $f : I_6 \to A$ (escrevemos $\text{card}\,(A) = 6$).

Por exemplo, se $A = \{\Box, \bigcirc, \triangle, \bigstar, *, \Diamond\}$, temos $\text{card}\,(A) = 6$.

Em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, temos $\text{card}\,(I_n) = \text{card}\,(\{1,2,\ldots,n\}) = n$

O número natural n é o número cardinal que representa a cardinalidade do conjunto I_n e de todos conjuntos finitos que têm n elementos, ou seja, todos os conjuntos A tais que existe uma bijeção $f : I_n \to A$ (escrevemos $\text{card}\,(A) = n$).

Obs.: O conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ é o conjunto dos números CARDINAIS chamados FINITOS, pois representam as cardinalidades dos conjuntos finitos.

(c) $\text{card}\,(\mathbb{N}) = w$: Denotamos por w (omega) o número cardinal que representa a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e de todos os conjuntos A tais que existe uma função bijetora $g : \mathbb{N} \to A$, ou seja, todos os conjuntos **enumeráveis infinitos**.

Por exemplo: $\text{card}\,(\mathbb{Z}) = w$, $\text{card}\,(\mathbb{Q}) = w$, $\text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = w$.

(d) $\text{card}\,(\mathbb{R}) = c$: Denotamos por c o número cardinal que representa a cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e de todos os conjuntos A tais que existe uma função bijetora $h : \mathbb{R} \to A$.

Por exemplo: Se $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, com $a < b \in \mathbb{R}$, temos $\text{card}\,(I) = c$.
$\text{card}\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = c$ (exercício anterior).
Veremos futuramente que $\text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}\,(\mathbb{R})$ e portanto $\text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$

Observações:

(i) O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável, ou seja, não existe função bijetora $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e temos assim que $\text{card}\,(\mathbb{N}) < \text{card}\,(\mathbb{R})$, isto é, $w < c$.

Até agora temos:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < w < c$$

(ii) É natural perguntarmos: w e c são os únicos cardinais infinitos ? Existem apenas dois tipos de "quantidades infinitas" : enumeráveis ou com a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$?

A resposta é NÃO !!!

Já vimos que, para todo conjunto A, temos $\text{card}\,(A) < \text{card}\,(\mathcal{P}(A))$

Portanto $c = \text{card}\,(\mathbb{R}) < \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{R})) < \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))) < \ldots$

Então

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < w < c < \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{R})) < \ldots$$

e existem portanto diversos "níveis de infinito" .

(iii) Hipótese do Contínuo (HC):

Não existe nenhum número cardinal λ tal que $w < \lambda < c$ (Em outras palavras, **não existe** nenhum conjunto A com $w = \text{card}\,(\mathbb{N}) < \text{card}\,(A) < \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = c$).

Em 1938, Gödel mostrou a **consistência** da Hipótese do Contínuo: com os axiomas da Teoria dos Conjuntos **não** se pode refutá-la.

Em 1963, Cohen mostrou a **independência** da HC em relação aos axiomas da Teoria dos Conjuntos, ou seja, admiti-la como verdadeira (Gödel) ou falsa não gera contradição (não se pode prová-la com os axiomas usuais).

Operações com números cardinais

Sejam k e λ dois números cardinais e A, B dois conjuntos tais que $\text{card}\,(A) = k$ e $\text{card}\,(B) = \lambda$.

Definimos:

$$k + \lambda = \text{card}\ (\ A \times \{0\} \ \cup \ B \times \{1\}\ )$$

$$k \cdot \lambda = \text{card}\,(A \times B)$$

$$\lambda^k = \text{card}\,(\ \{\, f : A \to B\,\}\ )$$

Obs.:

(i) As operações acima estão BEM DEFINIDAS, ou seja, os resultados obtidos **independem** dos conjuntos A e B escolhidos tais que $\text{card}\,(A) = k$ e $\text{card}\,(B) = \lambda$ (veja Exercícios 4 e 5 da pág. 50 para mostrar que a adição e multiplicação, respectivamente, estão bem definidas).

(ii) Se $A \cap B = \phi$, então $\text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) = \text{card}\,(A \cup B)$.

(iii) As operações acima definidas estendem naturalmente as operações correspondentes já conhecidas para os números naturais.

Exemplos:

(a) $n + w = w$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

Seja dado $n \in \mathbb{N}$. Tomemos um conjunto $A = \{\, a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n\,\}$, finito com n elementos e disjunto de $\mathbb{N}$. Note que é possível obter tal conjunto A (dê um exemplo).

Definamos $f : A \cup \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(x) = i$ se $x = a_i \in A$ e $f(x) = x + n$ se $x \in \mathbb{N}$.

É fácil ver que f é bijetora e portanto $\text{card}\,(A \cup \mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N})$ e temos:

$$n + w = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(\mathbb{N}) = \text{card}\,(A \cup \mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N}) = w$$

(b) $w + w = w$:

Sejam $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ e $I = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Temos $P \cap I = \phi$

Já vimos que $\text{card}\,(P) = \text{card}\,(\mathbb{N}) = \text{card}\,(I)$. Portanto:

$$w + w = \text{card}\,(P) + \text{card}\,(I) = \text{card}\,(P \cup I) = \text{card}\,(\mathbb{N}) = w$$

(c) $w \cdot w = w$:

Já vimos que $\text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N})$. Então:

$$w \cdot w = \text{card}\,(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N}) = w$$

Obs.: Já vimos que $\text{card}\,(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \text{card}\,(\mathbb{N})$. No próximo capítulo veremos que $\text{card}\,(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \text{card}\,(\mathbb{R})$. Esses resultados podem ser generalizados:

Fato: Se E é um conjunto INFINITO, temos $\text{card}\,(E\times E) = \text{card}\,(E)$ (este resultado é equivalente ao Axioma da Escolha).

(d) $n\cdot c = c$ para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\text{card}\,(\mathbb{R}) \le \text{card}\,(I_n\times\mathbb{R})$$

$$\text{card}\,(I_n\times\mathbb{R}) \le \text{card}\,(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \text{card}\,(\mathbb{R})$$

Assim

$$n\cdot c = \text{card}\,(I_n\times\mathbb{R}) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = c$$

(e) Sejam $A=\{0,1\}$ e $A_n = A$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

$A^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1\times A_2\times A_3\times\ldots$ é a coleção de todas as seqüências formadas com os algaarismos 0 e 1 = coleção de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $A=\{0,1\}$.

Como $\text{card}\,(A^{\mathbb{N}}) = \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, temos:

$$2^w = \text{card}\,(\,\{f:\mathbb{N}\to\{0,1\}\,\}\,) = \text{card}\,(A^{\mathbb{N}}) = \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

Exercícios:

1) Prove que $w+c=c$ e que $w\cdot c = c$.

2) O objetivo deste exercício (dirigido) é mostrar que se k é um qualquer número cardinal infinito, então $k+w=k$.

Seja A um conjunto infinito qualquer, ou seja, $k = \text{card}\,(A)$ é um número cardinal infinito.

Temos então que A contém algum subconjunto infinito enumerável (veja Exercício 4 da pág.54), ou seja, existe $E\subset A$ tal que $\text{card}\,(E) = \text{card}\,(\mathbb{N}) = w$.

Use então a definição de soma de cardinais em $k+w$ e o fato de que $\text{card}\,(A\times A) = \text{card}\,(A)$ para concluir que $k+w=k$.

3) Utilize o exercício acima para concluir que $\text{card}\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \text{card}\,(\mathbb{R})$.

4) Generalize o Exemplo (e) acima e conclua que $2^c = \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

5) Generalize exercícios anteriores e conclua que $k < 2^k$ para todo número cardinal k .

6) Considere os seguintes resultados (se quiser, pode tentar demonstrá-los):

(i) Se $\alpha \leq \beta$ e k são números cardinais, então $\alpha^k \leq \beta^k$.

(ii) Se k, λ e β são números cardinais, então $(\lambda^k)^\beta = \lambda^{k \cdot \beta}$.

Prove agora que se k e λ são números cardinais, com k infinito e $2 \leq \lambda \leq k$ então

$$2^k = \lambda^k = k^k$$

Conclua que $w^w = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = n^w$ para todo $n \geq 2 \in \mathbb{N}$.

Conclua também que $w^c = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Capítulo 5

Números reais: racionais/irracionais, algébricos/transcendentes

5.1 Características fundamentais de $\mathbb{R}$

Consideremos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, os quais associamos aos pontos de uma reta orientada, a Reta Real:

Consideremos ainda $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de ADIÇÃO e MULTIPLICAÇÃO e suas bem conhecidas propriedades (comutativa, associativa, elemento neutro, elemento inverso, distributiva).

$\mathbb{R}$ é também totalmente ordenado pela relação usual $\leq$ (MENOR OU IGUAL), a qual apresenta também algumas propriedades bem conhecidas.

O conjunto $\mathbb{R}$, com as operações de adição e multiplicação usuais e a relação de ordem usual $\leq$, pelas propriedades que possui, é o que chamamos um CORPO ORDENADO.

Definimos ainda, para cada $x \in \mathbb{R}$, seu módulo (ou valor absoluto) $|x|$, pondo $|x| = x$ se $x \geq 0$ ou $|x| = -x$ se $x < 0$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $|x - y|$ representa geometricamente a distância entre x e y na Reta Real. Em particular, $|x| = |x - 0|$ representa a distância entre x e 0 (zero).

De tudo o que vimos até agora, ainda não temos uma característica que nos permita distinguir $\mathbb{R}$ dos demais corpos ordenados (como o corpo ordenado $\mathbb{Q}$, por exemplo).

Agora, finalmente, veremos a principal característica de $\mathbb{R}$, que o destaca dos demais corpos ordenados:

Axioma do sup:

Se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e possui cota superior (existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c$ para todo $a \in A$) então A admite SUPREMO em $\mathbb{R}$, ou seja, existe $s = \sup A \in \mathbb{R}$.

(equivalentemente, se $A \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e limitado inferiormente - possui cota inferior - então existe $i = \inf A \in \mathbb{R}$. Veja exercício 32 da pág. 28)

Para ilustrar a diferença que agora aparece entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, observemos que o conjunto $A = \{\, x \in \mathbb{Q}\ ;\ x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \,\} \subset \mathbb{Q}$ é não-vazio e limitado superiormente em $\mathbb{Q}$ mas **não admite** supremo em $\mathbb{Q}$.

Por atender ao Axioma do sup, o corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais é dito ser um CORPO ORDENADO COMPLETO.

Algumas consequências do Axioma do sup:

Proposição 5.1. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais não é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto $\mathbb{N}$ (que é não-vazio) seja limitado superiormente.

Pelo Axioma do sup, existe então $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Como $s - 1 < s$, então $s - 1$ não pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < n_0$, o que implica em $s = (s-1) + 1 < n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ (Contradição! Pois s é cota superior de $\mathbb{N}$).

Então, obrigatoriamente, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$. ■

Obs.: A Proposição acima é equivalente às seguintes:

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, é possível obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.
- Dado $a > 0$ em $\mathbb{R}$, é possível obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < a$.

O fato de as proposições equivalentes acima serem verdadeiras em $\mathbb{R}$ traz algumas consequências muito interessantes que serão exploradas futuramente, como por exemplo a DENSIDADE de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (todo intervalo aberto não-vazio em $\mathbb{R}$ possui números racionais). Com isto, todo número real poderá ser "aproximado por uma sequência de números racionais".

Teorema 5.2. *(Teorema dos Intervalos Encaixados)*

Dada uma "sequência decrescente" $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ *de intervalos limitados, fechados (e não-vazios)* $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *, existe pelo menos um número real* c *tal que* $c \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *, ou seja,* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \phi$ *.*

Demonstração:

Temos: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$.

Seja $A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots \}$. $A \neq \phi$ e A é limitado superiormente.

Pelo Axioma do sup, existe $c = \sup A \in \mathbb{R}$ e já temos $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, b_n é cota superior do conjunto A e portanto $\sup A = c \leq b_n$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$).

Assim, temos $a_n \leq c \leq b_n$, ou seja, $c \in I_n = [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercícios:

1) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, prove que

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{e} \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{(Desigualdade Triangular).}$$

(Sugestão: Para a Desigualdade Triangular, considere que $|a| = \max\{a, -a\}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$).

2) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, prove que $|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$.

3) Prove a equivalência entre a Proposição 5.1 e as demais, da observação da pág. 62.

4) Prove que se $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{(Desigualdade de Bernoulli)}$$

5) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 1$. Mostre que o conjunto $\{ a^n \,;\, n \in \mathbb{N} \}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, ou seja, dado qualquer $K \in \mathbb{R}$, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > K$.

6) Seja $A = \left\{ \dfrac{1}{\pi^n} \,;\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Mostre que $\inf A = 0$ (0 é a maior das cotas inferiores de A, ou seja, 0 é cota inferior de A e nenhum número maior que 0 pode ser cota inferior de A).

(Sugestão: Use que $\pi > 1$ e o exercício anterior).

7) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$. Mostre que, dado $\epsilon > 0$ (em $\mathbb{R}$), é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, então $0 < a^n < \epsilon$.

(Sugestão: "Olhe" para $1/a$ e use o exercício 5 anterior)

Obs.: Este resultado nos diz que se $0 < a < 1$ então a^n se aproxima cada vez mais e tanto quanto desejarmos de 0 (zero), à medida em que $n \in \mathbb{N}$ cresce, ou seja, $a^n \to 0$ (a^n tende a 0) quando $n \to \infty$.

8) Seja $x \neq 1$ um número real. Para cada $n \in \mathbb{N}$, prove que

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n \;=\; \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Use o resultado acima para concluir o que ocorre com a soma $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ à medida em que n cresce ($n \to \infty$) nas seguintes situações: (i) $a > 1$ (ii) $0 < a < 1$.

Finalmente, use suas conclusões acima para "calcular a soma": $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots$

9) Dê exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados (ilimitados) e não-vazios cuja interseção seja vazia e um exemplo de uma sequência decrescente de intervalos limitados (não fechados) e não-vazios cuja interseção também seja vazia, mostrando assim que as hipóteses para o Teorema dos Intervalos Encaixados são imprescindíveis.

5.2 Números reais e representações decimais

Preliminares: somas convergentes/divergentes

Consideremos uma "soma" de números reais com uma quantidade infinita (e enumerável) de parcelas:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots$$

Uma soma como acima pode definir ou não um determinado número real.

É intuitivamente claro que esta soma representa um número real x quando suas chamadas "somas parciais" $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ se aproximam cada vez mais e tanto quanto desejarmos de x à medida que n cresce ($n \to \infty$). Neste caso dizemos que a soma CONVERGE e escrevemos $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = x$.

Quando a soma não converge, ou seja, quando suas somas parciais não se aproximam cada vez mais (e tanto quanto desejarmos) de nenhum número real específico à medida que $n \to \infty$, dizemos que a ela (a soma) DIVERGE.

Exemplos:

(a) A soma $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ DIVERGE.

De fato, sua n-ésima soma parcial s_n é dada por $s_n = 1 + 1 + \ldots + 1$ (n vezes) $= n$ e, à medida que n cresce, s_n não se aproxima de nenhum número real em particular.

(b) A soma $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots \;=\; \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + \ldots$ CONVERGE.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Assim:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ quando } n \to \infty \,, \quad \text{pois } \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty \,.$$

Portanto a soma converge e podemos escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \ldots \;=\; 1$$

(c) A soma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ DIVERGE.

Temos que $s_n = 1$ se n é ímpar e $s_n = 0$ se n é par.

Quando $n \to \infty$ as somas parciais s_n ficam oscilando nos valores 0 e 1, não se aproximando de nenhum número real específico, e portanto a soma acima diverge.

(d) É bem conhecido que se $0 < a < 1$ então a soma $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ converge e temos

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots = \frac{1}{1-a} \,.$$

Mais geralmente, temos

$$b + b\cdot r + b\cdot r^2 + b\cdot r^3 + \ldots = \frac{b}{1-r} \quad \text{se } |r| < 1$$

(“soma da PG infinita de razão r, com $|r| < 1$”)

Por exemplo: $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

Existem resultados que nos permitem concluir se esses tipos de soma convergem ou não.

Um deles nos interessa em particular:

Teorema 5.3. *Consideremos uma soma* $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ *cujos termos (parcelas) são todos não-negativos (* $x_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *).*

A soma **converge** *se, e somente se,* **suas somas parciais são limitadas**, *ou seja, existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *.*

Corolário 1. *Seja* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *.*

Se $a_n \in A$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então a soma* $\dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{a_3}{10^3} + \dfrac{a_4}{10^4} + \ldots$ *converge.*

De fato:

Já temos que $\dfrac{a_n}{10^n} \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (parcelas não-negativas).

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \;\leq\; \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} \;<\; \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Segue do Teorema acima que $\dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{a_3}{10^3} + \dfrac{a_4}{10^4} + \ldots$ converge.

Exercícios:

1) Prove que a soma $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots$ converge.

(Sugestão: Use o Teorema 5.3, considerando que $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}} \quad \forall\, n = 3, 4, 5, \ldots$)

Obs.: A soma acima representa um número real muito importante no Cálculo e denotado por e (base dos logarítmos naturais).

2) Prove que a soma $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots$ diverge, mostrando que as somas parciais do tipo $s_{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ ficam maiores do que qualquer $K \in \mathbb{R}$ quando $n \to \infty$.

(Sugestão: Agrupe s_{2^n} na forma

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1 + 2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

e, em cada grupo de parcelas, substitua as parcelas pelo mínimo do grupo)

Obs.: Esta soma é a famosa Série Harmônica.

3) Considere os seguinte resultado:

Se $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = x \in \mathbb{R}$ (isto é, a série converge), então para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot x_3 + \ldots = \lambda \cdot x \, .$$

Sabemos que a soma $\dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \dfrac{9}{10^3} + \ldots$ converge.

Mostre que ela é igual a 1, **utilizando o resultado acima**.

(Sugestão: Chame de x o valor da soma e multiplique por 10)

Use a mesma técnica acima para calcular as seguintes somas:

$3 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{5}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{5}{10^4} + \dfrac{4}{10^5} + \dfrac{5}{10^6} + \dfrac{4}{10^7} + \dfrac{5}{10^8} + \ldots$

$\dfrac{2}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{2}{10^4} + \dfrac{7}{10^5} + \dfrac{2}{10^7} + \dfrac{7}{10^8} + \ldots$

Representações decimais

Definição 5.4. *Uma REPRESENTAÇÃO DECIMAL (ou representação na base* 10*) é um símbolo na forma* $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *, com* $a_0 \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *e* $a_n \in A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *, e representa o seguinte número real (a soma converge)*

$$\pm \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \right)$$

Exemplos:

(a) $0,9999\ldots = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \dfrac{9}{10^3} + \dfrac{9}{10^4} + \ldots = 1$

(b) $-2,240000\ldots = -\left(2 + \dfrac{2}{10} + \dfrac{4}{10^2} + \dfrac{0}{10^3} + \dfrac{0}{10^4} + \ldots\right) = -\left(2 + \dfrac{24}{100}\right) = -\dfrac{56}{25}$.

(c) $5,3333\ldots = 5 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \ldots = 5 + \dfrac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 5 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{16}{3}$.

(d) $0,110001000000000000000000100\ldots = \alpha \in \mathbb{R}$ (número real representado pelo algarismo 1 nas casas decimais de posições $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \ldots$ e pelo algarismo 0 nas demais posições).

Este número é chamado Número de Liouville (falaremos dele mais à frente no Curso).

Obs.: Consideremos uma representação decimal $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots = x \in \mathbb{R}$.

Quando existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0 \quad \forall\, n > n_0$, ou seja, $x = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0} 0000 \ldots$, dizemos que a representação decimal é FINITA e escrevemos simplesmente $x = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0}$. Caso contrário, ela é dita INFINITA.

Se $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$ tem representação decimal finita, então x possui também uma representação decimal infinita (Exercício).

Por exemplo: $1 = 0,99999\ldots$. $-2,24 = -2,239999\ldots$.

Outro fato que devemos observar é que cada número admite no máximo uma representação decimal finita e no máximo uma representação decimal infinita (exercício).

Toda representação decimal $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ corresponde a um número

$$x = \pm\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\right) \in \mathbb{R} .$$

Nos interessa agora ver que vale a recíproca da afirmativa acima. É o que diz o ...

Teorema 5.5. *Todo número real admite (pelo menos) uma representação decimal, ou seja, dado* $x \in \mathbb{R}$ *, existe uma representação decimal* $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *tal que* $x = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$.

Demonstração:

Vamos adotar as notações $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Seja $x \geq 0$ em $\mathbb{R}$.

Como $x \in [0,+\infty) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1) = [0,1) \cup [1,2) \cup [2,3) \cup \ldots$, então existe um único (os intervalos que formam a união são disjuntos) $a_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $x \in [a_0, a_0+1)$ e portanto

$$0 \leq x - a_0 < 1$$

Como $x - a_0 \in [0,1) = \left[0, \frac{1}{10}\right) \cup \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{9}{10}, 1\right)$, então existe um único $a_1 \in A$ tal que $(x - a_0) \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right)$ e portanto

$$0 \leq x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) < \frac{1}{10}$$

Como $x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) \in \left[0, \frac{1}{10}\right) = \left[0, \frac{1}{100}\right) \cup \left[\frac{1}{100}, \frac{2}{100}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{9}{100}, \frac{1}{10}\right)$, então existe um único $a_2 \in A$ tal que $x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) \in \left[\frac{a_2}{100}, \frac{a_2+1}{100}\right)$ e portanto

$$0 \leq x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\right) < \frac{1}{10^2}$$

Prosseguindo desta forma, obtemos indutivamente uma sequência $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ com $a_0 \in \mathbb{N}_0$ e $a_n \in A \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq x - \Big(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\Big) < \frac{1}{10^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Vamos mostrar que x tem a representação decimal $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$.

Seja $y = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots \in \mathbb{R}$.

Como $s_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$ se aproxima tanto de y quanto desejarmos, quando $n \to \infty$, então **não podemos ter** $x < y$, pois neste caso conseguiríamos obter $n' \in \mathbb{N}$ suficientemente grande com $x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n'}}{10^{n'}}$ (absurdo). Assim, temos $x \geq y$ e podemos escrever:

$$0 \leq x - y \leq x - \Big(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\Big) < \frac{1}{10^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Ora, como $10 > 1$, temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ (por menor que ele seja) é possivel obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $10^{n_0} > \frac{1}{\epsilon}$ (veja Exercício 5 da pág. 63), ou seja, $\frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$.

Com isso temos

$$0 \leq x - y \leq \epsilon \quad \text{para todo } \ \epsilon > 0$$

Portanto $x = y = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ e com isso provamos que todo número real $x \geq 0$ admite uma representação decimal.

Finalmente, se $x < 0$ em $\mathbb{R}$, temos que $(-x) > 0$ e portanto admite uma representação decimal $(-x) = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. É imediato que $x = -a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. ∎

Corolário 1. *Sejam* $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ *e* D_0^+ *o conjunto das representações decimais não-negativas.*

A função $f : D_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ *dada por*

$$f(a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$$

é sobrejetora.

Em outras palavras: $\operatorname{card}(D_0^+) \geq \operatorname{card}(\mathbb{R}_0^+)$.

5.3 Números reais e cardinalidade

• $\mathbb{R}$ é não-enumerável

Teorema 5.6. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais é não-enumerável, ou seja,*

$$\text{card}\,(\mathbb{N}) = w < c = \text{card}\,(\mathbb{R})$$

Demonstração:

Já sabemos que $\mathbb{R}$ é infinito. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{R}$ seja enumerável, ou seja, que exista uma função BIJETORA $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

É possível obter $a_1 < b_1$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(1) \notin [a_1, b_1]$.

Olhemos para $f(2)$.

Se $f(2) \in [a_1, b_1]$, temos $a_1 < f(2)$ ou $f(2) < b_1$.

Se $a_1 < f(2)$, tomemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = \dfrac{a_1 + f(2)}{2}$. Com isso $a_1 = a_2 < b_2 < f(2) \leq b_1$.

Se $f(2) < b_1$, tomemos $b_2 = b_1$ e $a_2 = \dfrac{f(2) + b_1}{2}$. Com isso $a_1 \leq f(2) < a_2 < b_2 = b_1$.

Se $f(2) \notin [a_1, b_1]$, tomemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = b_1$.

De qualquer modo, temos $f(2) \notin [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, com $a_2 < b_2$.

Prosseguindo desta forma, obtemos indutivamente uma sequência decrescente de intervalos limitados, fechados e não-vazios $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ tais que $f(n) \notin [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Portanto $f(n) \neq c \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ e f não é sobrejetora (Contradição!)

Então, obrigatoriamente, $\mathbb{R}$ é não-enumerável. ■

• card $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) =$ card $(\mathbb{R})$

Teorema 5.7. $2^w = \text{card}\,(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = c$

Demonstração:

Sejam $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ e D_0^+ o conjunto das representações decimais não-negativas.

Então $\text{card}\,(\mathbb{R}) = \text{card}\,((0,1)) \leq \text{card}\,(\mathbb{R}_0^+) \leq \text{card}\,(\mathbb{R}) \therefore \text{card}\,(\mathbb{R}_0^+) = \text{card}\,(\mathbb{R})$.

Do Corolário do Teorema 5.5, temos: $\operatorname{card}(D_0^+) \geq \operatorname{card}(\mathbb{R}_0^+) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

Consideremos agora $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e S o conjunto de todas as sequências formadas com algarismos em A, ou seja, S é o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em A $(S = A^{\mathbb{N}})$.

$\operatorname{card}(A) = 10$, $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = w \Rightarrow 10^w = \operatorname{card}(A^{\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(S)$.

Agora: $D_0^+ = \{\ a_0, a_1a_2a_3\ldots\ ;\ a_0 \in \mathbb{N}_0$ e $a_1a_2a_3\ldots \in S\ \}$.

Então $\operatorname{card}(D_0^+) = \operatorname{card}(\mathbb{N}_0 \times S) = \operatorname{card}(\mathbb{N}_0)\cdot\operatorname{card}(S) = w\cdot 10^w = 10^w = 2^w = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Logo $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \geq \operatorname{card}(\mathbb{R})$. (I)

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto das sequências formadas com os algarismos 0 ou 1, ou seja, todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$.

Seja $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dada por $f(a_1,a_2,a_3,\ldots) = \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{a_3}{10^3} + \ldots$.

Como f é injetora, então $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^w = \operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{R})$. (II)

De (I) e (II), temos que $2^w = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \operatorname{card}(\mathbb{R}) = c$. ■

• $\operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$

Teorema 5.8. $c\cdot c = \operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}) = c$

Demonstração:

Já temos que $\operatorname{card}(\mathbb{R}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. (I)

Seja $f : (0,1)\times(0,1) \to (0,1)$ a função dada por

$$f(a,b) = 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ ,$$

sendo $a = 0, a_1a_2a_3\ldots$ e $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$ únicas representações decimais infinitas de a e b.

Se $f(x,y) = 0, c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots = f(u,v)$, temos então que $x = 0, c_1c_3c_5\ldots = u$ e $y = 0, c_2c_4c_6\ldots = v$, sendo f injetora.

Assim $\operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\ (0,1)\times(0,1)\ ) \leq \operatorname{card}(\ (0,1)\ ) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$. (II)

De (I) e (II) temos $c\cdot c = \operatorname{card}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}) = c$. ■

5.4 Números racionais/irracionais

Uma classificação dos números reais os divide em duas classes de números:

Números racionais: Números reais que podem ser escritos na forma $\dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Notação: $\mathbb{Q} =$ conjunto dos números racionais.

Exemplos: $0, 5, -3, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{2}{7}$, etc.

Números irracionais: Números reais que não são racionais. Notação: $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} =$ conjunto dos números irracionais.

Exemplos: $\sqrt{2}\,, \pi, e,$ etc.

Assim, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, com $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \phi$.

Identificação de números racionais/irracionais

- Via representação decimal:

Sabemos que toda representação decimal $\pm a_0, a_1a_2a_3\ldots$, com $a_0 \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_n \in A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ representa um número real

$$x = \pm\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\right)$$

Já mostramos também que todo número real x admite (pelo menos) uma representação decimal.

Uma representação decimal FINITA é uma representação do tipo

$$x = \pm a_0, a_1a_2a_3\ldots a_{n_0}0000\ldots = \pm a_0, a_1a_2a_3\ldots a_{n_0}$$

(neste caso, temos também $x = \pm a_0, a_1a_2\ldots(a_{n_0} - 1)9999\ldots$ se $a_{n_0} \neq 0$)

Exemplos: $1 = 0,9999\ldots$, $-3,517 = -3,51699999\ldots$, etc.

Uma representação decimal é dita (uma dízima) PERIÓDICA quando é do tipo

$$\pm a_0, a_1a_2\ldots a_{n_0}\, b_1b_2\ldots b_p\, b_1b_2\ldots b_p\, b_1b_2\ldots b_p\ldots$$

ou seja, a partir de um certo ponto, um conjunto de algarismos se repete indefinidamente e na mesma ordem.

Neste caso costumamos escrever $\pm a_0, a_1a_2\ldots a_{n_0}\overline{b_1b_2\ldots b_p}$.

Exemplos: $0,333\ldots = 0,\overline{3}$, $-7,2315151515\ldots = -7,23\overline{15}$, etc.

Teorema 5.9. *Um número real x é racional se, e somente se, x tem representação decimal periódica (ou finita)*

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Podemos supor sem perda de generalidade que $x = p/q > 0$ $(p, q \in \mathbb{Z})$.

Dividindo p por q, temos: $p = a_0 \cdot q + r$ com $a_0 \in \mathbb{N}_0$ e $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Assim $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a_0 \cdot q + r}{q} = a_0 + \dfrac{r}{q}$.

Se $r = 0$ temos $x = a_0$ (representação decimal finita, que consideramos periódica).

Se $r > 0$ então dividimos $10 \cdot r$ por q e obtemos $10 \cdot r = a_1 \cdot q + r_1$, com $a_1 \in \{0, 1, \ldots 9\}$ e $r_1 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Assim $x = a_0 + \dfrac{r}{q} = a_0 + \dfrac{10 \cdot r}{10 \cdot q} = a_0 + \dfrac{a_1 \cdot q + r_1}{10 \cdot q} = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{r_1}{10 \cdot q}$.

Se $r_1 = 0$ temos $x = a_0 + \dfrac{a_1}{10} = a_0, a_1$ (representação decimal finita).

Se $r_1 > 0$ então dividimos $10 \cdot r_1$ por q e obtemos $10 \cdot r_1 = a_2 \cdot q + r_2$ com $a_2 \in \{0, 1, \ldots 9\}$ e $r_2 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Assim $x = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{r_1}{10 \cdot q} = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{10 \cdot r_1}{10^2 \cdot q} = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2 \cdot q + r_2}{10^2 \cdot q} = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{r_2}{10^2 \cdot q}$.

Prosseguindo dessa forma, teremos duas possibilidades:

1) Em algum momento teremos um resto $r_{i_0} = 0$ e neste caso x terá uma representação decimal finita.

2) Ao dividir sucessivamente $10 \cdot r_i$ por q, chegará um momento em que teremos REPETIÇÃO de um resto, pois os restos não-nulos sempre estarão no conjunto FINITO $\{1, 2, \ldots, q-1\}$. Isso indica que deste ponto em diante teremos repetição dos algarismos na representação decimal, indefinidamente e na mesma ordem, ou seja, teremos uma representação PERIÓDICA.

$(\Leftarrow)$ Seja $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0} \overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$. Temos:

$10^{n_0+p} \cdot x = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n_0} b_1 b_2 \ldots b_p, \overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$ e $10^{n_0} \cdot x = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n_0}, \overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$.

Assim

$$(10^{n_0+p} - 10^{n_0}) \cdot x = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n_0} b_1 b_2 \ldots b_p - a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n_0} \in \mathbb{Z} ,$$

ou seja,

$$x = \frac{a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n_0} b_1 b_2 \ldots b_p - a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n_0}}{(10^{n_0+p} - 10^{n_0})} \in \mathbb{Q} .$$

■

Exemplos:

(a) $\dfrac{2}{9}=\dfrac{20}{10\cdot 9}=\dfrac{2\cdot 9+2}{10\cdot 9}=\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10\cdot 9}=\dfrac{2}{10}+\dfrac{20}{10^2\cdot 9}=\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10^2}+\dfrac{2}{10^2\cdot 9}=0,2222\ldots$.

(b) $\dfrac{13}{7}=1+\dfrac{6}{7}=1+\dfrac{60}{10\cdot 7}=1+\dfrac{56+4}{10\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{4}{10\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{40}{10^2\cdot 7}=$

$=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{5}{10^2\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{50}{10^3\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{1}{10^3\cdot 7}=$

$=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{10}{10^4\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{3}{10^4\cdot 7}=$

$=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{30}{10^5\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{4}{10^5}+\dfrac{2}{10^5\cdot 7}=$

$=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{4}{10^5}+\dfrac{20}{10^6\cdot 7}=1+\dfrac{8}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{7}{10^3}+\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{4}{10^5}+\dfrac{2}{10^6}+\dfrac{6}{10^6\cdot 7}=$

$=\ 1,857142857142857142\ldots\ =\ 1,\overline{857142}$.

(c) $-\dfrac{27}{8}=-\left(3+\dfrac{3}{8}\right)=-\left(3+\dfrac{30}{10\cdot 8}\right)=-\left(3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{6}{10\cdot 8}\right)=-\left(3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{60}{10^2\cdot 8}\right)=$

$=-\left(3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{4}{10^2\cdot 8}\right)=-\left(3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{40}{10^3\cdot 8}\right)=-\left(3+\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10^2}+\dfrac{5}{10^3}\right)=$

$=-3,375$.

(d) $0,1010010001000010000010000001\ldots$ representa um número irracional, pois é uma representação decimal não-periódica.

(e) Seja $x=0,\overline{9}=0,99999\ldots$.

Então $10\cdot x=9,9999\ldots \Rightarrow 9\cdot x=10\cdot x-x=9 \Rightarrow x=1$.

(f) Seja $x=0,\overline{27}=0,272727\ldots$.

$100\cdot x=27 \Rightarrow 99\cdot x=100\cdot x-x=27 \Rightarrow x=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}$.

(g) Seja $x=-5,12$. $x=-\dfrac{512}{100}=-\dfrac{128}{25}$.

Obs.: Um número racional na FORMA IRREDUTÍVEL p/q , ou seja, $\mathrm{mdc}(p,q)=1$, tem representação decimal finita se, e somente se, todos os fatores primos de q pertencem ao conjunto $\{2,5\}$.

- Via operações algébricas:

(a) $\sqrt{2}$ é irracional:

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Então $\sqrt{2} = a/b$, com $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Assim, $2 = a^2/b^2 \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2$ é par $\Rightarrow a$ é par $\Rightarrow a = 2k \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2$ é par $\Rightarrow b$ é par (Contradição, pois $\text{mdc}(a, b) = 1$).

Então, obrigatoriamente, $\sqrt{2}$ é irracional.

Exercício: Mostre que $\sqrt{p}$ é irracional, para todo p primo.
(Sugestão: Use que um número primo p divide um produto se, e somente se, p divide pelo menos um dos fatores)

(b) $\sqrt{6}$ é irracional:

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{6}$ seja racional.

Então $\sqrt{6} = a/b$, com $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Assim, $6 = a^2/b^2 \Rightarrow 6b^2 = a^2 \Rightarrow 3|a^2$ (3 divide a^2) $\Rightarrow 3|a$ (veja Sugestão acima) $\Rightarrow a = 3k \Rightarrow 6b^2 = 9k^2 \Rightarrow 2b^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|2b^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b$ (Contradição, pois $\text{mdc}(a, b) = 1$).

Então, obrigatoriamente, $\sqrt{6}$ é irracional.

Obs.: O conjunto $\mathbb{Q}$, com as operações usuais de adição e multiplicação e suas propriedades é um corpo. Com isso $\mathbb{Q}$ é "FECHADO" para as operações: a soma e o produto (bem como a diferença e o quociente) de números racionais são ainda números racionais.

Já o conjunto $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dos números irracionais não é fechado para as operações usuais. Por exemplo: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mas $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Uma consequência bastante útil das considerações acima é a seguinte porposição:

Proposição 5.10. *Se α é irracional e r é racional então a adição, multiplicação, subtração e divisão ($r \neq 0$) de r e α resultam em números irracionais (em particular, $-\alpha$ e $1/\alpha$ são também números irracionais.*

Exemplos: $1 + \sqrt{2}$, $1/\pi$, $-e$, $-3\sqrt{3}$ são todos irracionais.

(c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional:

Suponhamos, por absurdo, que $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ seja racional.

Então $x^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$ é racional (Contradição, pois 5 é racional e $2\sqrt{6}$ é irracional - veja a Proposição anterior).

Então, obrigatoriamente, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional.

- Via equações polinomiais:

Um POLINÔMIO DE GRAU $n \in \mathbb{N}$ em x e com coeficientes reais é uma expressão da forma

$$p(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ $\forall\, i=1,2,\ldots n$ (coeficientes) e $c_n \neq 0$.

Uma EQUAÇÃO POLINOMIAL é uma igualdade da forma

$$p(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0 \;=\; 0\ .$$

Uma RAIZ de uma equação polinomial $p(x)=0$ é um número α que no lugar de x torna a equação verdadeira. Exemplos: -3 é uma raiz da equação polinomial $x^2-9=0$; 2 não é raiz da equação polinomial $x^3+7=0$.

O seguinte Teorema e seu Corolário mostram-se bastante úteis na identificação de certos números irracionais.

Teorema 5.11. *Consideremos uma equação polinomial qualquer* **com coeficientes inteiros***:*

$$c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0 \;=\; 0\ .$$

Se esta equação possui uma raiz racional $\alpha=a/b$ $(a,b\in\mathbb{Z}\,,\ b\neq 0)$*, onde* a/b *é uma fração irredutível, então* a *é um divisor de* c_0 *e* b *é um divisor de* c_n*.*

Corolário 1. *Se uma equação com coeficientes inteiros* $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0 \;=\; 0$ *(note que* $c_n=1$*) possui uma raiz racional* α *, então* α *é um número inteiro e* $\alpha | c_0$ *(*α *divide* c_0 *.*

Exemplos:

(a) $\sqrt{22}$ é irracional:

De fato, $\sqrt{22}$ é raiz de $x^2 - 22 = 0$. Se esta equação tiver uma raiz racional, esta raiz terá que ser um número inteiro e $\sqrt{22}$ não é inteiro, pois $16 < 22 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{22} < 5$.

(b) $\sqrt[3]{4}$ é irracional:

De fato, $\sqrt[3]{4}$ é raiz da equação $x^3 - 4 = 0$.

Todas as raízes racionais desta equação são inteiros e divisores de 4, ou seja, os candidatos a raízes racionais desta equação são ± 1 , ± 2 , ± 4 .

Como nenhum destes números é raiz de $x^3 - 4 = 0$, podemos concluir que esta equação não possui nenhuma raiz racional e portanto $\sqrt[3]{4}$ é um número irracional.

- Via Trigonometria:

A partir das fórmulas

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

podemos construir uma série de identidades trigonométricas: $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, $\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$, $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$, $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, $\operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a$, etc.

Essas identidades trigonométricas, combinadas com o Teorema anterior (e seu Corolário) e outras fórmulas da Trigonometria, nos permitem provar a irracionalidade de vários números, senos ou cossenos de certos arcos.

Exemplos:

(a) $\operatorname{sen} 10^o$ é irracional:

(b) $\cos 40^o$ é irracional:

(c) $\cos 20^o$, $\operatorname{sen} 20^o$, $\operatorname{tg} 20^o$ são irracionais:

- Via logarítmos decimais:

Exemplos:

(a) $\log_{10} 15$ é irracional:

De fato, suponhamos que $\log_{10} 15$ seja racional. Como $\log_{10} 15 > 0$, podemos supor $\log_{10} 15 = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$.

Então $10^{p/q} = 15 \Rightarrow \left(10^{p/q}\right)^q = 15^q$, isto é, $10^p = 15^q$.

Temos então: $2^p \cdot 5^p = 3^q \cdot 5^q \Rightarrow 3 \,|\, (2^p \cdot 5^p)$ (Contradição! - pois sabemos que 3 não divide 2 e não divide 5).

Então, obrigatoriamente, $\log_{10} 15$ é um número irracional.

(b) $\log_{10} 16$ é irracional:

De fato, suponhamos que $\log_{10} 16$ seja racional. Como $\log_{10} 16 > 0$, podemos supor $\log_{10} 16 = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$.

Então $10^{p/q} = 16 \Rightarrow \left(10^{p/q}\right)^q = 16^q$, isto é, $10^p = 16^q$.

Temos então: $2^p \cdot 5^p = 2^{4q} \Rightarrow 5 \,|\, 2^{4q}$ (Contradição! - pois sabemos que 5 não divide 2).

Então, obrigatoriamente, $\log_{10} 16$ é um número irracional.

Exercícios:

1) Prove a Proposição 5.10 (pág. 75).

2) Responda se cada um dos números dados abaixo é racional ou irracional. Justifique sua resposta e, se o número for racional, descreva-o como quociente de dois números inteiros.

(a) $a = 1,175$;

(b) $b = \sqrt[7]{9}$;

(c) $c = \operatorname{sen} 15^o$;

(d) $d = \log_{10} \dfrac{5}{3}$;

(e) $e = 0,101001000100001000001\ldots$;

(f) $f = 1 + \dfrac{1}{2}\log_{10} 90 - \log_{10} 3$;

(g) $g = \operatorname{tg} a$, sendo $\cos 4a$ irracional ;

(h) $h = \sqrt{2}\,(\sqrt{7} - 1)$;

(i) $i = 15,2399999999\ldots$;

(j) j , único real que é raiz de $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 6x + 3 = 0$;

(k) $k = \log_{10} 75 - \log_{10} 3$;

(l) $l = \text{sen}\, 3a$, sendo $\cos a = \dfrac{3}{5}$;

(m) $m = -5,1234567891011121314151617\ldots$;

(n) $n = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$;

(o) $o = \cos 12^o$;

(p) $p = -3,13636363636\ldots$;

(q) q , único real que é raiz de $3x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$.

Densidade dos irracionais/racionais em $\mathbb{R}$ (e aproximação de irracionais por racionais)

Sejam $a < b$ dois números reais quaisquer.

Por mais próximos que estejam um do outro, isto é, por menor que seja a diferença $b - a$ (por menor que seja o intervalo aberto (a, b)), **mostraremos** que é sempre possível garantir a existência de números irracionais e racionais em (a, b).

A partir do resultado acima, dado qualquer número $x \in \mathbb{R}$, podemos obter um número irracional (ou racional) tão próximo de x quanto desejarmos. Em outras palavras, é possível obter uma sequência (x_n) de números irracionais (racionais) que se aproximam cada vez mais de x.

De fato, existe um irracional (racional) x_1 no intervalo $(x - 1, x + 1)$. Observemos que $|x_1 - x| < 1$ (a distância de x_1 a x é menor do que um).

Existe um irracional (racional) x_2 no intervalo $(x - \dfrac{1}{2}, x + \dfrac{1}{2})$.

Prosseguindo desta forma, obtemos uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de irracionais(racionais) tais que $|x_n - x| < \dfrac{1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ou seja, $0 \leq |x_n - x| < \dfrac{1}{n} \to 0$ quando n cresce.

É fácil perceber (pelo menos intuitivamente) que os termos x_n se aproximam cada vez mais e tanto quanto desejarmos de x à medida que n cresce.

Escrevemos então $x_n \to x$ e dizemos que a sequência (x_n) converge para x.

Por este motivo, dizemos que os conjuntos $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ são DENSOS em $\mathbb{R}$.

Vamos então mostrar os resultados que garantem as densidades de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

A densidade de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é imediata a partir da enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$ (e de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, que tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$):

Teorema 5.12. *(Densidade de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$) Se $a < b$ são dois números reais quaisquer, então existe (pelo menos) um número irracional no intervalo (a, b).*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $(a, b) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \phi$.

Então $(a, b) \subset \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \text{card}\,((a, b)) \leq \text{card}\,(\mathbb{Q}) = w$ (Contradição!, pois sabemos que $\text{card}\,((a, b)) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = c > w = \text{card}\,(\mathbb{Q})$).

Portanto, obrigatoriamente, temos $(a, b) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \phi$. ■

O resultado acima já era esperado, pois $\text{card}\,(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = \text{card}\,((a, b)) > \text{card}\,(\mathbb{Q})$.

A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, por outro lado, não é tão obvia assim ("temos muito menos racionais do que racionais na Reta Real"):

Teorema 5.13. *(Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$) Se $a < b$ são dois números reais quaisquer, então existe (pelo menos) um número racional no intervalo (a, b).*

Demonstração:

Como $a < b$, temos $b - a > 0$.

Sabemos que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, o que equivale a dizer que, dado $c > 0$ em $\mathbb{R}$, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < c$.

Considerando $c = b - a > 0$, é possível obter então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < b - a$.

O próximo passo é observar que $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n_0}, \frac{m+1}{n_0}\right) = \mathbb{R}$ (tente provar, como exercício).

Como $a \in \mathbb{R}$, existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in \left[\dfrac{m_0}{n_0}, \dfrac{m_0+1}{n_0}\right)$, ou seja, $\dfrac{m_0}{n_0} \leq a < \dfrac{m_0+1}{n_0}$.

Afirmamos que $a < \dfrac{m_0+1}{n_0} < b$, ou seja, $\dfrac{m_0+1}{n_0} \in (a, b)$.

De fato, se $b \leq \dfrac{m_0+1}{n_0}$ então $\dfrac{m_0}{n_0} \leq a < b \leq \dfrac{m_0+1}{n_0} \Rightarrow b-a \leq \dfrac{m_0+1}{n_0} - \dfrac{m_0}{n_0} = \dfrac{1}{n_0}$

(Contradição!, pois $\dfrac{1}{n_0} < b-a$).

Então, obrigatoriamente, existe um número racional $\dfrac{m_0+1}{n_0} \in (a,b)$. ∎

Obs.: Da mesma forma que a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ não é tão óbvia quanto a já esperada densidade de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, o problema de aproximar um número irracional por números racionais (ou por uma sequência de números racionais) é bem mais interessante que o contrário:

Exercício: Dado um número racional r, obtenha uma sequência (x_n) de números irracionais de forma que $x_n \to r$.

(Sugestão: RACIONAL + IRRACIONAL = IRRACIONAL, IRRACIONAL/RACIONAL = IRRACIONAL e $x/n \to 0$ para todo real x)

Desta forma, iremos ver alguns resultados conhecidos sobre aproximação de números irracionais por números racionais.

Aproximação de números irracionais por números racionais:

(A) Aproximações para raízes quadradas:

Seja $a > 0$.

Tomemos $x_1 > 0$ e façamos $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{a}{x_1}\right) > 0$, $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{a}{x_2}\right) > 0 \ldots$.

Em geral: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) > 0$.

Com isso obtem-se uma sequência $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ e é possível mostrar que $x_n \to \sqrt{a}$, ou seja, à medida que n cresce, os termos x_n da sequência se aproximam cada vez mais e tanto quanto desejarmos de $\sqrt{a}$.

Ora, se a e x_1 são racionais, é fácil ver que $x_2, x_3, x_4, \ldots$ são todos racionais.

Temos então um método para aproximação de certos irracionais (raízes quadradas) por sequências de racionais:

Exemplo: Seja $a = 2 > 0$. Tomemos $x_1 = 1 > 0$. Então:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}\,,\; x_3 = \frac{1}{2}\left((3/2) + \frac{2}{(3/2)}\right) = \frac{17}{12}\,,\; x_4 = \frac{1}{2}\left((17/12) + \frac{2}{(17/12)}\right), \ldots$$

Assim, obtemos uma sequência de números racionais $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ tal que $x_n \to \sqrt{2}$.

(B) Aproximações via representações decimais:

Se temos em mãos a representação decimal de um número irracional α, já dispomos de uma sequência de racionais que se aproximam cada vez mais e tanto quanto desejarmos de α :

Exemplo: Seja $\alpha = \pi = 3,141592653\ldots$. Temos

$3 < \pi < 4$ (a distância de π a 3 ou 4 é menor do que 1)

$3,1 < \pi < 3,2$ (a distância de π a 31/10 ou 32/10 é menor do que 1/10)

$3,14 < \pi < 3,15$ (a distância de π a 314/100 ou 315/100 é menor do que 1/100)

$3,141 < \pi < 3,142$ (a distância de π a 3141/1000 ou 3142/1000 é menor do que 1/1000)

$3,1415 < \pi < 3,1416$ (a distância de π a 31415/10000 ou 31416/10000 é menor do que 1/10000) e assim por diante...

Obs.: Esse tipo de aproximação é um tanto restritivo, pois precisamos ter em mãos a representação decimal do irracional α a ser aproximado e os racionais que aproximam α têm sempre potências de 10 como denominadores.

(C) Aproximações por racionais com qualquer denominador:

O Lema abaixo é suficiente pra provarmos o resultado que nos interessa, a ser apresentado em seguida.

Lema 5.14. *Para qualquer número irracional α existe um único número inteiro m tal que*

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}\ .$$

De fato, observemos inicialmente que $-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ \alpha - \frac{1}{2} < m < \alpha + \frac{1}{2}$.

Como α é irracional, então o intervalo $\left(\alpha - \frac{1}{2}\, , \alpha + \frac{1}{2}\right)$ (de comprimento igual a uma unidade) tem extremos irracionais.

Se k é o menor inteiro em $\left[\alpha + \frac{1}{2}\, , +\infty\right)$, é claro que $m = k - 1 \in \left(\alpha - \frac{1}{2}\, , \alpha + \frac{1}{2}\right)$ (pois caso contrário a distância de $m = k - 1$ até k seria maior do que uma unidade).

É óbvio também que m é o único inteiro no intervalo $\left(\alpha - \frac{1}{2}\, , \alpha + \frac{1}{2}\right)$.

Da observação inicial, o resultado segue. ∎

Teorema 5.15. *Sejam* α *um número irracional qualquer e* n *um número natural qualquer.*

Então, existe um número racional de denominador n *(digamos* m/n*) tal que*

$$-\frac{1}{2n} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n} \, .$$

Demonstração:

Como α é irracional e n é natural (racional em particular), então $n \cdot \alpha$ é irracional.

Segue do Lema anterior que existe um único inteiro m tal que $-\frac{1}{2} < n \cdot \alpha - m < \frac{1}{2}$, ou seja, $-\frac{1}{2n} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}$ (dividindo por $n > 0$). ∎

(D) Aproximações melhores:

Para completar, apenas enunciaremos dois teoremas, mais elaborados que o anterior, e que produzem aproximações ainda melhores:

Teorema 5.16. *Quaisquer que sejam o número irracional* α *e o inteiro positivo* k*, existe um número racional* m/n*, com* $n \leq k$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), tal que*

$$-\frac{1}{k \cdot n} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{k \cdot n} \, .$$

Teorema 5.17. *Para todo número irracional* α*, existem infinitos números racionais* m/n*, em forma irredutível, tais que*

$$-\frac{1}{n^2} < \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2} \, .$$

Exercícios:

1) Usando (A), obtenha sequências de racionais que convergem para os seguintes números irracionais: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{30}$.

2) (a) Obtenha um número racional que esteja a uma distância menor que $1/10000$ do número irracional $\sqrt{2} = 1,41421356...$.
(b) Obtenha um número racional que esteja a uma distância menor que $1/1000000$ do número irracional $e = 2,7182818...$.
(c) Obtenha um número racional que esteja a uma distância menor que $1/53422709$ do número irracional $\pi = 3,14159265358979...$.

3) Usando as demonstrações do Lema e do Teorema em (C), obtenha um número racional na forma $m/7$ que esteja a uma distância menor do que $1/14$ do número irracional $\sqrt{3}$.

5.5 Números algébricos/transcendentes

Definição 5.18. *Um número (real) é dito ALGÉBRICO quando é raiz de uma equação polinomial de grau maior ou igual a 1 e coeficientes inteiros.*

Exemplos: 5 é um número algébrico, pois é raiz da equação $x - 5 = 0$.

$-\frac{3}{7}$ é um número algébrico, pois é raiz da equação $7x + 3 = 0$.

$\sqrt{2}$ é um número algébrico, pois é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$.

Observações:

(a) Apesar de estarmos estudando números reais, é possível usar a Definição acima também para números complexos algébricos.

(b) Todo número racional é algébrico.

De fato, seja $r = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Então r é raiz da equação $qx - p = 0$.

Definição 5.19. *Um número (real) é dito TRANSCENDENTE quando não é algébrico.*

Questão: Existem números transcendentes ?
(Todos os números transcendentes serão irracionais - veja Obs. acima, (b))

O Teorema seguinte nos ajudará a responder a questão acima:

Teorema 5.20. *O conjunto dos números algébricos é enumerável. (tente provar)*

Corolário 1. *Existem números transcendentes e, mais ainda, o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável (ou seja, "existem muito mais números transcendentes do que números algébricos").*

De fato, se não existissem números transcendentes, todo número real seria algébrico (Absurdo, pois $\mathbb{R}$ é não-enumerável e pelo Teorema acima o conjunto dos números algébricos é enumerável).

Mais ainda, se o conjunto dos números transcendentes fosse enumerável, então $\mathbb{R}$ (união dos conjuntos dos números algébricos e transcendentes) seria enumerável (Absurdo!).

Temos as seguintes classificações para os números reais:

$$\text{REAIS}\begin{cases}\text{RACIONAIS} \quad \text{(todos são algébricos)}\\ \\ \text{IRRACIONAIS} \begin{cases}\text{ALGÉBRICOS}\\ \text{TRANSCENDENTES}\end{cases}\end{cases}$$

ou então

$$\text{REAIS}\begin{cases}\text{ALGÉBRICOS} \begin{cases}\text{RACIONAIS}\\ \text{IRRACIONAIS}\end{cases}\\ \\ \text{TRANSCENDENTES} \quad \text{(todos são irracionais)}\end{cases}$$

Não é trivial (em geral é extremamente difícil) provar que certos números são trancendentes. Vejamos alguns resultados conhecidos nessa direção (obtenção de números transcendentes):

- $\alpha = 0,110001000000000000000000100\ldots... = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^6} + \dfrac{1}{10^{24}} + \dfrac{1}{10^{120}} + \ldots =$ $= \dfrac{1}{10^{1!}} + \dfrac{1}{10^{2!}} + \dfrac{1}{10^{3!}} + \dfrac{1}{10^{4!}} + \ldots = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{10^{n!}}$ (Número de Liouville) é um número transcendente (veja uma prova em [5]).

- π (razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência) é um número transcendente (veja em [6]).

- $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \ldots$ é um número transcendente (veja em [6]).

- Teorema (Lindemann): Se $a \neq 0$ é algébrico então e^a é transcendente.

Exemplos: $e^{\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{e} = e^{1/3}$, $e = e^1$ são transcendentes.

- Teorema (Gelfand-Schneider): Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, α é algébrico e β é algébrico e irracional, então α^β é transcendente.

Exemplos: $2^{\sqrt{2}}$, $\log_{10} 2$ (mostre), e^π (mostre, considerando o Teorema também para números complexos) são transcendentes.

- $\operatorname{sen} a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\csc a$, $\sec a$, $\operatorname{ctg} a$ são transcendentes, se a (em radianos) é algébrico e $a \neq 0$.

- $\log a = \ln a$ é transcendente, se a é algébrico, $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

- $0,123456789101112131415\ldots$ (Constante de Champernowne) é transcendente.

Para finalizar, vejamos alguns exemplos de números os quais não sabemos (problemas em aberto) se são ou não são transcendentes:

$\pi + e$, $\pi - e$, $\pi \cdot e$, π / e , π^{π} , e^{e} , π^{e} .

Constante de Euler-Mascheroni: $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right]$.

Referências

[1] Alencar Filho, E., *Teoria Elementar dos conjuntos*, Livraria Nobel S.A.

[2] Domingues, H. H. & Iezzi, G., *Álgebra Moderna*, Atual Editora LTDA.

[3] Castrucci, B., *Elementos de Teoria dos Conjuntos*, Livraria Nobel S.A.

[4] Lima, Elon L., *Curso de Análise, vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA

[5] Niven, Ivan M., *Números: Racionais e Irracionais*, SBM

[6] Figueiredo, Djairo G., *Números Irracionais e Transcendentes*, Coleção Iniciação Científica, SBM

[7] Lipschutz, Seymour, *Teoria dos Conjuntos*, Coleção Schaum, Editora MacGraw-Hill do Brasil